Ağırlıklı Toplam En Küçük Kareler Çözümü: Üç Farklı Algoritma ve 2-Boyutlu Afin Dönüşümüne Uygulanması

(Weighted Total Least-Squares Solution: Three Different Algorithms and Application to 2-Dimensional Affine Transformation)

Cüneyt AYDIN, Merve UYGUR, S. Özgür UYGUR
Yıldız Teknik Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü, İstanbul
caydin@yildiz.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, klasik dengeleme modelindeki katsayılar matrisinin de rasgele hatalı terimlerden oluşması durumunda kullanılan "Errors-in-Variables (EIV)" modeli ve bunun ağırlıklı toplam en küçük kareler (WTLS) çözümü incelenmektedir. WTLS çözümü için jeodezi literatüründe geçen üç yöntem ve bunlara ilişkin iteratif algoritmalar irdelenmektedir. Ele alınan bir 2-boyutlu Afin dönüşüm probleminde elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Sayısal uygulama sonuçlarına göre her üç algoritmanın özdeş hız ve doğrulukta çalıştığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Afin Dönüşüm, EIV Modeli, Toplam En Küçük Kareler, Ağırlıklı Toplam En Küçük Kareler, Algoritma*

ABSTRACT

In this study, "Errors-in-Variables (EIV model)" considered when the design matrix of classical adjustment model includes the terms with random errors and its Weighted Total Least-Squares (WTLS) solution are investigated. Three WTLS solution methods given in the geodetic literature and their iterative-algorithms are examined. They are compared in a 2D Affine coordinate transformation example. According to the numerical results of the example, it is observed that the three algorithms have equivalent accuracy and convergence rate.

Key Words: *Affine Transformation, EIV Model, Total Least-Squares, Weighted Total Least-Squares, Algorithm*

1. GİRİŞ

Klasik dengeleme modeli, fonksiyonel model ve stokastik modelden oluşur. Dengeleyici polinom, benzerlik dönüşümü, Afin dönüşümü ve üç boyutlu kartezyen dik koordinat dönüşümü gibi problemlerde fonksiyonel modeli oluşturan katsayılar matrisi rasgele hatalı terimlerden oluşabilir. Bu nedenle söz konusu problemler için oluşturulan fonksiyonel modelde yalnızca ölçüler değil katsayılar da rasgele hatalarla yüklü olabilir. Bu durumda kestirim işlemi alışıldık dengeleme yöntemleriyle gerçekleştirilemez. Bu amaçla, dengelemede "genel en küçük kareler yöntemi" adı verilen bir iteratif çözüm önerilir (Ghilani ve Wolf, 2006). Ancak, Neitzel ve Petrovic (2008) ve Neitzel (2010)'da da belirtildiği üzere, jeodezide çok yaygın olmayan bu genel en küçük kareler yöntemi eksik bir doğrusallaştırma işlemine dayanır. Doğru çözüm için söz konusu problem, "katsayıların da rasgele hatalı olduğu dengeleme modeli (Errors-in-Variables/EIV model)" altında düşünülmeli ve çözüm "toplam en küçük kareler (Total Least-Squares/TLS)" adı verilen yöntem ile gerçekleştirilmelidir (Golub ve van Loan, 1980).

TLS çözümü, modelde geçen tüm hataların karelerinin toplamının, modelin fonksiyonel kısmı için öngörülmüş denkliği koruyacak şekilde minimum yapılmasına dayanır (Carroll ve Ruppert, 1996; van Huffel, 2004; Gillard, 2010). TLS'nin temelleri 1800'lü yılların sonlarında Adcock ve Kummel'in yaptığı çalışmalara dayanır (Paris, 2004; Gillard, 2010). Adcock, "A problem in least squares" adlı çalışmasında, ele almış olduğu regresyon (dengeleyici doğru) probleminde x ve y koordinatlarının her ikisinin de hatalı olması durumunda en uygun çözümün ölçü noktalarının dengeleyici doğruya dik uzaklıklarının karelerinin toplamının minimum yapılması ile elde edileceğini ifade etmiştir (Paris 2004; Gillard, 2010). Buradan elde edilen ve ortogonal regresyon adı verilen yöntem aslında TLS'nin regresyon analizindeki çözümüyle özdeş sonuçlar üretmektedir.

TLS çözümünde ölçülere ve katsayılar matrisine ilişkin kofaktör matrisi göz önüne alınmaz. Bu nedenle, TLS'nin jeodezik problemlerde uygulanabilmesi için Schaffrin ve Wieser (2008) "ağırlıklı TLS (Weighted TLS /WTLS)" adı verilen bir çözümü önermektedir. Bu çözümde modelde geçen hataların-TLS'den farklı olarak-ağırlıklı karelerinin toplamının minimum yapılması hedeflenir. Söz konusu çalışmadan sonra EIV model jeodezide yoğun bir ilgiye yol açmıştır: Neitzel ve Petrovic (2008) ve Neitzel (2010), yukarıda sözü edilen genel en küçük kareler yönteminin de dayandığı bir doğrusal olmayan Gauss-Helmert modelin uygun biçimde çözüldüğünde elde edilen sonuçların WTLS çözümüyle özdeş olduğunu belirtmiş, Schaffrin ve Snow (2010), Lu (2012), Snow (2012) ve Fang (2011; 2013) bu çözüme ilişkin daha detaylı bilgileri vermiştir. Schaffrin ve Felus (2008), koordinat dönüşümünde çok değişkenli (multivariate) TLS yöntemini önermiş, Schaffrin ve Uzun (2012), WTLS çözümünde Baarda'nın güvenilirlik teorisini incelemiş, yine Snow (2012), EIV modelin stokastik kısmında geçen ağırlık katsayıları matrislerinin tekil olmaları durumunda WTLS çözümünün nasıl gerçekleştirileceğini irdelemiştir. Yanı sıra, Shen vd. (2011) ve Xu vd. (2012), WTLS çözümünün stokastik özelliklerini ve bias kavramını inceleyerek varyans kestiriminde "bias-düzeltmesi" konusuna değinmişlerdir.

Literatürde geçen WTLS çözüm yöntemleri, Schaffrin ve Wieser (2008)'de verilen hedef fonksiyonuna dayanır. Bu yöntemler, problemin yapısı gereği, iteratif çözümlerdir ve söz konusu hedef fonksiyonunun farklı biçimlerde ele alınmasıyla elde edilmişlerdir. Fang (2011) ve Snow (2012) söz konusu yöntemleri jeodezi problemlerinde detaylı olarak incelemiştir. Snow (2012) doktora çalışması incelendiğinde ilk yöntemin, Schaffrin vd. (2012)'de "genelleştirilmiş normal denklemler" olarak adlandırılan yapıya dayandığı görülür. Mahboub (2012) tarafından verilen yöntem de aslında bu yöntemin farklı bir şekilde oluşturulmuş halidir. Yine Snow (2012)'de ifade edilen ikinci yöntem, Amiri-Simkooei ve Jazaeri (2012) tarafından önerilen WTLS yöntemi ile özdeştir. Amiri-Simkooei ve Jazaeri (2012) bu yöntemi standart en küçük kareler yöntemiyle özdeşleştirmektedir. Bununla birlikte, Shen vd. (2011), Schaffrin ve Wieser (2008) tarafından verilen hedef fonksiyonunu bir Gauss-Newton iteratif algoritması içerisinde farklı bir şekilde ele almış ve kendi yöntemlerini geliştirmişlerdir. Ancak bu yöntemin eşitlikleri incelendiğinde aslında Snow (2012) ve Amiri-Simkooei ve Jazaeri (2012) tarafından verilen yöntemle aynı olduğu görülür. Yanı sıra, Tong vd. (2011), yine Schaffrin ve Wieser (2008)'in çalışmasından yola çıkarak, geliştirilmiş-WTLS çözümü adını verdikleri bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntemin eşitlikleri incelendiğinde diğer WTLS çözüm yöntemlerinden farklı olduğu görülmektedir. Bu nedenle söz konusu yöntem bu çalışmada ayrı bir yöntem olarak irdelenecektir.
Çalışmanın ikinci bölümünde dengeleme modeli ve en küçük kareler çözümüne kısaca değinilmekte, üçüncü bölümde WTLS çözümü ve ele alınan üç algoritma incelenmektedir. Dördüncü bölümde WTLS'nin Afin dönüşümü problemine uyarlanması açıklanmakta, son bölümde ise bir Afin dönüşümü uygulaması ele alınmaktadır.

2. EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMÜ

$\mathbf{y}$, $(n\times1)$ ölçüler vektörü; $\mathbf{A}$, $(n\times u)$ katsayılar matrisi (rank$\mathbf{A}$=u); $\boldsymbol{\beta}$, $(u\times1)$ bilinmeyenler vektörü; σ^2, (bilinmeyen) varyans bileşeni; $\mathbf{Q}_y$ ve $\mathbf{C}_y$ $(n\times n)$ ölçülerin kofaktör matrisi ve kovaryans matrisi olmak üzere, ölçüler vektörünün beklenen değeri ($E(\mathbf{y})$) ve kovaryans matrisi ile yazılan aşağıdaki modele Gauss-Markoff modeli denir (Koch, 1999):

$$E(\mathbf{y})=\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \quad , \quad \mathbf{C}_y=\sigma^2\mathbf{Q}_y \tag{1}$$

Ölçülerin normal dağılmış rasgele hatalarla yüklü olduğu varsayılsın. Bu hatalar $\mathbf{e}_y$ rasgele hata vektörü ile gösterilsin;

$$\mathbf{e}_y \sim N(\mathbf{0},\ \mathbf{C}_y=\sigma^2\mathbf{Q}_y) \tag{2}$$

Böylece model (1) aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{y}-\mathbf{e}_y=\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \quad , \quad \mathbf{C}_y=\sigma^2\mathbf{Q}_y \tag{3}$$

(3) modeli dengeleme modeli olarak adlandırılır.

(1) veya (3) modelinin çözülebilmesi yani bilinmeyenler vektörü $\boldsymbol{\beta}$'nın kestirimi için beklenen değere sadık en uygun kestirim, maksimum likelihood ve en küçük kareler yöntemleri uygulanabilir. Uygulamadaki kolaylıkları nedeniyle, dengeleme hesabında en küçük kareler yöntemi tercih edilir. En küçük kareler yöntemi,

$$\Omega=\mathbf{e}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{e}_y \tag{4}$$

karesel biçimini minimum yapan $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün bulunmasına dayanır. Bu amaçla,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\frac{\partial(\mathbf{e}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{e}_y)}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0} \tag{5}$$

eşitliği düşünülür. Dengeleme hesabından bilindiği üzere, buradan normal denklemler çıkar;

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{A})\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{0} \tag{6}$$

Normal denklemlerin çözümünden, bilinmeyenler vektörünün kestirim değeri $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y} \tag{7}$$

Böylece, ölçü hatalarının kestirim değeri

$$\hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{y}, \qquad (8)$$

bilinmeyen varyans bileşeni σ^2'nin yansız kestiricisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_y^T \mathbf{Q}_y^{-1} \hat{\mathbf{e}}_y}{n-u} \qquad (9)$$

ve bilinmeyenlerin kovaryans matrisi

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \qquad (10)$$

bulunur.

3. AĞIRLIKLI TOPLAM EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMÜ

a. Genel Bakış

Dengeleyici polinom, benzerlik dönüşümü ve Afin dönüşümü gibi uygulamaların (3) modeli biçiminde yazılan dengeleme modelindeki **A** katsayılar matrisi de rasgele hatalı değerlerden (rasgele değişkenlerden) oluşabilir. Örneğin, $(x_1; y_1),\ldots,(x_n; y_n)$ nokta çiftleri kullanılarak dengeleme hesabı ve regresyon analizinde oldukça iyi bilinen "y=a+bx" biçimindeki bir dengeleyici doğrunun belirlenmesi problemini ele alalım. Dengeleme modeli

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} - \underbrace{\begin{pmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\beta} \quad , \quad \mathbf{C}_y = \sigma^2 \mathbf{Q}_y \qquad (11)$$

biçiminde oluşturulur. Bu modelde yalnızca y'lerin rasgele hatalı olduğu düşünülmektedir. Ancak, gerçekte x'ler de ölçülmüş ve dolayısıyla rasgele hatalı değerler olabilir. y'lerdekinden bağımsız olduğu varsayılan bu hataları $e_{x1},\ldots,e_{xn}$ şeklinde gösterelim ve bir n×1 boyutlu $\mathbf{e}_x$ vektörü altında toplayalım;

$$\mathbf{e}_x \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_x = \sigma^2 \mathbf{Q}_x) \qquad (12)$$

Bu durumda (11) dengeleme modeline ilişkin **A** katsayılar matrisi yerine, x'lerin hatalarını da göz önüne alan

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 - e_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - e_{x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & e_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_{x_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_A} = \mathbf{A} - \mathbf{E}_A \qquad (13)$$

yapısı düşünülmelidir. Burada $\mathbf{E}_A$, n×u boyutlu hata matrisi olarak adlandırılır. (12) ve (13) eşitlikleri (11) modelinde göz önüne alınırsa,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} - \underbrace{\begin{pmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_y} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & e_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_{x_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_A} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\beta},$$

$$\mathbf{C}_y = \sigma^2 \mathbf{Q}_y \ , \ \mathbf{C}_x = \sigma^2 \mathbf{Q}_x \ \text{ve} \ \mathbf{C}_{yx} = \mathbf{0} \qquad (14)$$

çıkar.

Yukarıda x'lerin kofaktör matrisi $\mathbf{Q}_x$ ve kovaryans matrisi $\mathbf{C}_x$ düşünülmüştür. Problemin daha uygun çözülebilmesi için **A** katsayılar matrisinin vektör biçimini ifade eden nu×1 boyutlu vec(**A**)'nın (Ek-A) nu×nu boyutlu $\mathbf{Q}_A$ kofaktör matrisini ve $\mathbf{C}_A = \sigma^2 \mathbf{Q}_A$ kovaryans matrisini ele alalım. Bu amaçla $\mathbf{E}_A$ hata matrisinin vektör biçimini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\mathbf{e}_A = \mathrm{vec}(\mathbf{E}_A) = \mathrm{vec}\left(\begin{pmatrix} 0 & e_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_{x_n} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{x_1} \\ \vdots \\ e_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \mathbf{e}_x \\ \mathbf{I}_n \mathbf{e}_x \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{e}_x = \mathbf{J}\,\mathbf{e}_x \qquad (15)$$

Burada, $\mathbf{0}_n$, n×n boyutlu sıfır matrisi; $\mathbf{I}_n$, n×n boyutlu birim matristir. (15) eşitliğine kofaktör yayılma kuralı uygulanarak

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{J} \mathbf{Q}_x \mathbf{J}^T \qquad (16)$$

bulunur. Böylece, (14) modeli

$$\mathbf{y} - \mathbf{e}_y = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A)\beta \quad , \quad \mathbf{C} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_A \end{pmatrix} \qquad (17)$$

biçiminde yazılır. Katsayıların da rasgele hatalı olduğu bu dengeleme modeli, istatistikte EIV (Errors-in-Variables) model olarak adlandırılır.

"y=a+bx" biçimindeki dengeleyici doğru probleminde hem y hem de x değişkenlerinin hatalı olması durumu ilk kez Adcock tarafından 1800'lü yılların sonunda ele alınmıştır. Adcock, söz konusu problemi, ölçü noktalarının dengeleyici doğruya dik uzaklıklarının karelerinin toplamının minimum yapılması olarak tanımlamıştır (Paris, 2004; Gillard, 2010). İstatistikte hem y hem de x'lerin hatalı ancak eşit ağırlıklı olduğu dengeleyici doğru problemine bu nedenle ortogonal regresyon veya EIV regresyonu denilmektedir (Carroll ve Ruppert, 1996; van Huffel, 2004). (17) modelinde $\mathbf{Q}_y$ ve $\mathbf{Q}_A$ birim matris olarak ele alınırsa,

$$\mathbf{y}-\mathbf{e}_y=(\mathbf{A}-\mathbf{E}_A)\beta \quad , \quad \mathbf{C}=\sigma^2\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix} \tag{18}$$

modeli elde edilir. Bu modelin ortogonal regresyon çözümü ile a sıfır eki ve b eğimi şöyle bulunur (van Huffel 2004);

$$\hat{b}=\frac{s_{yy}-s_{xx}\pm\sqrt{(s_{yy}-s_{xx})^2+4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}\ ,\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x} \tag{19}$$

burada, s_{xx} ve s_{yy}, deneysel varyanslar ve s_{xy}, deneysel kovaryanstır;

$$s_{xx}=\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2\ ,\ s_{yy}=\frac{1}{n}\sum(y-\bar{y})^2\ ,$$

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})\ ,\ (\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x\ ;\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum y)$$

Günümüzde (18) modelinin çözümü, "toplam en küçük kareler (Total Least-Squares/TLS)" çözümü olarak adlandırılır. TLS problemi aşağıdaki biçimde tanımlanır (van Huffel, 2004):

$$\mathbf{e}_y^T\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_A^T\mathbf{e}_A\rightarrow\text{min.}\ ,$$

$$\{\ \mathbf{y}-\mathbf{e}_y=(\mathbf{A}-\mathbf{E}_A)\beta\ \text{ koşulu altında} \tag{20}$$

(20) probleminin çözümü için aşağıdaki Lagrange fonksiyonu düşünülür:

$$\mathbf{e}_y^T\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_A^T\mathbf{e}_A+2\lambda^T(\mathbf{y}-\mathbf{e}_y-(\mathbf{A}-\mathbf{E}_A)\beta) \tag{21}$$

Burada λ, $n\times1$ boyutlu Lagrange çarpanları bilinmeyenleri vektörüdür. (21) Lagrange fonksiyonunun çözümü ile TLS çözümüne ulaşılır. Bu TLS çözümü, problem dengeleyici doğru problemi ise, (19) ile verilen ortogonal regresyon çözümüne denk olur.

b. WTLS Çözümü

Schaffrin ve Wieser (2008), ölçü ağırlıklarının farklı olduğu (17) EIV modelinin çözümü için "ağırlıklı TLS (Weighted TLS /WTLS)" çözümünü vermektedir. WTLS problemi şöyle tanımlanmaktadır;

$$\mathbf{e}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_A^T\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A\rightarrow\text{min.},$$

$$\{\ \mathbf{y}-\mathbf{e}_y=(\mathbf{A}-\mathbf{E}_A)\beta\ \text{ koşulu altında} \tag{22}$$

Bu optimizasyon probleminin çözümü için (20)'de verilen Lagrange fonksiyonuna benzer aşağıdaki hedef fonksiyonu düşünülür;

$$\phi=\mathbf{e}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_A^T\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A+\ldots$$

$$\ldots2\lambda^T(\mathbf{y}-\mathbf{e}_y-(\mathbf{A}-\mathbf{E}_A)\beta) \tag{23}$$

(23) eşitliğinde $\mathbf{E}_A\beta$ çarpımı bir vektördür. Bir vektöre vec operatörün uygulanması ile sonuç değişmeyeceği için ve Koch (1999; s. 41)'de verilen

$$\text{vec}(\mathbf{MNL})=(\mathbf{L}^T\otimes\mathbf{M})\text{vec}(\mathbf{N}) \tag{24}$$

özelliği nedeniyle $\mathbf{E}_A\beta$ çarpımı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir;

$$\mathbf{E}_A\beta=\mathbf{I}_n\mathbf{E}_A\beta=\text{vec}(\mathbf{I}_n\mathbf{E}_A\beta)=(\beta^T\otimes\mathbf{I}_n)\text{vec}(\mathbf{E}_A)=\ldots$$

$$\ldots(\beta^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{e}_A \tag{25}$$

Burada, $\otimes$, Kronecker çarpımıdır (Ek-B). (25) eşitliği (23)'de düşünülürse,

$$\phi=\mathbf{e}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_A^T\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A+\ldots$$

$$\ldots2\lambda^T(\mathbf{y}-\mathbf{e}_y-\mathbf{A}\beta-(\beta^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{e}_A) \tag{26}$$

elde edilir. WTLS problemi için jeodezide geliştirilen yöntemler (26) hedef fonksiyonunun farklı biçimlerdeki çözümleriyle elde edilmiştir. Bunlardan üçü aşağıda ele alınmaktadır.

c. WTLS Çözüm Algoritması-1

(26) fonksiyonunun $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_A$, β ve λ'ya göre kısmi türevleri alınır, bulunan sonuçların devrikleri

sıfıra eşitlenerek 2'ye bölünürse çözüm için gerekli Euler kondisyon denklemleri bulunur (Schaffrin and Wieser, 2008; Snow, 2012; Fang, 2011):

$$\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{e}_y^T} = \mathbf{Q}_y^{-1}\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\lambda} = \mathbf{0} \tag{27a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{e}_A^T} = \mathbf{Q}_A^{-1}\hat{\mathbf{e}}_A + (\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\lambda} = \mathbf{0} \tag{27b}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \beta^T} = -\mathbf{A}^T\hat{\lambda} + \hat{\mathbf{E}}_A^T\hat{\lambda} = \mathbf{0} \tag{27c}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \lambda^T} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{A}\hat{\beta} + (\hat{\beta}^T\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\mathbf{e}}_A = \mathbf{0} \tag{27d}$$

(27a) ve (27b)'den $\hat{\mathbf{e}}_y$ ve $\hat{\mathbf{e}}_A$ hata vektör kestirimleri elde edilir;

$$\hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{Q}_y\hat{\lambda} \tag{28}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_A = -\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\lambda} \tag{29}$$

(28) ve (29) eşitlikleri (27d)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\beta} = \mathbf{Q}_y\hat{\lambda} + (\hat{\beta}^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\lambda} \tag{30}$$

çıkar. Burada,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_y + (\hat{\beta}^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n) \tag{31}$$

denirse, (30) eşitliğinden

$$\hat{\lambda} = \mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\beta}) \tag{32}$$

bulunur. Diğer yandan, (27c) eşitliğinde geçen $\hat{\mathbf{E}}_A^T\hat{\lambda}$ çarpımı u×1 boyutlu bir vektördür: (25) eşitliğine benzer biçimde,

$$\hat{\mathbf{E}}_A^T\hat{\lambda} = \mathrm{vec}(\mathbf{I}_u\hat{\mathbf{E}}_A^T\hat{\lambda}) = \mathrm{vec}(\hat{\lambda}^T\hat{\mathbf{E}}_A\mathbf{I}_u) = (\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)\,\hat{\mathbf{e}}_A \tag{33}$$

yazılır ve (27c) eşitliğinde düşünülürse,

$$\mathbf{A}^T\hat{\lambda} = (\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)\,\hat{\mathbf{e}}_A \tag{34}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\hat{\mathbf{e}}_A$'nın (29)'daki eşiti göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{A}^T\hat{\lambda} = -(\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)\,\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\lambda} \tag{35}$$

bulunur. Burada, "$(\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)$" terimi dışındaki $\hat{\lambda}$'lar yerine (32) eşitliği yazılıp,

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)\,\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{Q}_1^{-1}) \tag{36}$$

denirse,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\beta}) = -\mathbf{R}_1(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\beta}) \tag{37}$$

elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse, sonuç olarak,

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{R}_1\mathbf{A})\,\hat{\beta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1} + \mathbf{R}_1)\,\mathbf{y} \tag{38}$$

genelleştirilmiş normal denklemler bulunur (Schaffrin vd., 2012).

(38) normal denklemleri doğrudan çözülemez. Bilinmeyenlerin hesabı için iteratif bir çözüm yöntemi düşünülür: Öncelikle β için uygun bir yaklaşık değer seçilir. Bunun için (3) yapısındaki dengeleme modeli ilgili problem için oluşturulur ve en küçük kareler yönteminden bulunan bilinmeyenler vektörü yaklaşık değer olarak alınır. İlk iterasyonda bu yaklaşık değer kullanılarak (38) biçimindeki normal denklemlere ulaşılır ve bunun çözümünden de β'nın kestirim değeri elde edilir. Bu kestirim değeri bir sonraki iterasyonda yeni yaklaşık değer olarak atanır ve ilk iterasyondaki işlemler tekrarlanır. İterasyon işlemi kestirim değeri değişmeyene kadar sürdürülür. Böylece WTLS çözümü elde edilir. Söz konusu iteratif çözüme ilişkin algoritma Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. WTLS Çözüm Algoritması-1

<u>Adım 1:</u>

$\hat{\beta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y}$ kestirimini bul. Bunu yaklaşık değer olarak ata; $\beta_0 = \hat{\beta}$.

i=1, 2,… için tekrarla:

<u>Adım 2:</u>

Aşağıdakileri hesapla;

$$\mathbf{Q}_{1,i} = \mathbf{Q}_y + (\beta_{i-1}^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_A(\beta_{i-1}\otimes\mathbf{I}_n)$$

$$\hat{\lambda}_i = \mathbf{Q}_{1,i}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta_{i-1})$$

$$\mathbf{R}_{1,i} = (\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}_i^T)\,\mathbf{Q}_A(\beta_{i-1}\otimes\mathbf{Q}_1^{-1})$$

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{1,i}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{R}_{1,i}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{1,i}^{-1} + \mathbf{R}_{1,i})\mathbf{y}$$

<u>Adım 3:</u>

$\tau_i = \max(|\hat{\beta}_i - \beta_{i-1}|)$ değerini önceden belirlenmiş küçük bir ε hata sınır değeri ile karşılaştır:

1) $\tau_i>\varepsilon$ ise, $\beta_i=\hat{\beta}_i$ ile yeni iterasyona geç.
2) $\tau_i\le\varepsilon$ ise, iterasyonu durdur.

ç. WTLS Çözüm Algoritması-2

(32) eşitliğinden

$$\mathbf{Q}_1\hat{\lambda}=\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\beta} \tag{39}$$

çıkar. Snow (2012)'de gösterildiği gibi, bu eşitliğin her iki yanına $-\hat{\mathbf{E}}_A\beta$ eklenir ve yeniden düzenlenirse,

$$\mathbf{Q}_1\hat{\lambda}+(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)\hat{\beta}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{E}}_A\hat{\beta} \tag{40}$$

bulunur. (40) eşitliği ve (27c)'den elde edilen $(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)^T\hat{\lambda}=\mathbf{0}$ eşitliği birlikte düşünülerek aşağıdaki normal denklem sistemine ulaşılır:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A\\ (\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)^T & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\lambda}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}-\hat{\mathbf{E}}_A\hat{\beta}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{41}$$

Bu denklemlerde $\hat{\lambda}$ bilinmeyeni elimine edilirse,

$$(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)^T\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)\hat{\beta}=\dots$$

$$\dots(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{E}}_A)^T\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{E}}_A\hat{\beta}) \tag{42}$$

bulunur. (38) normal denklemlerinde olduğu gibi bu denklemlerin de her iki tarafı bilinmeyenleri içerdiğinden iteratif çözüm gerekir. Çözüm algoritması Tablo 2'de verilmektedir. Burada farklı olarak çözüm için hem β hem de $\mathbf{E}_A$ için yaklaşık değere ihtiyaç vardır: β için ilk yaklaşık değer bir önceki çözümde olduğu gibi en küçük kareler çözümünden alınır, diğeri için de sıfır matrisi öngörülür.

d. WTLS Çözüm Algoritması-3

Diğer yandan, Tong vd. (2011), problemin çözümünde (35) eşitliğinin yalnız solundaki $\hat{\lambda}$ için (32) ile verilen $\hat{\lambda}=\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\beta})$ eşitliğini düşünür:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\beta})=\dots$$

$$\dots-\underbrace{(\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}^T)\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)}_{\mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1}\hat{\lambda}=-\mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1\hat{\lambda} \tag{43}$$

Buradan aşağıdaki normal denklemler elde edilir:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A})\hat{\beta}=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{y}+\mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1\hat{\lambda}) \tag{44}$$

Bu denklemler, (38) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş normal denklemlerden farklıdır. Dolayısıyla farklı bir çözüm yöntemi olarak karşımıza çıkar. İteratif çözüm işlemleri Tablo 3'de verilmektedir.

Tablo 2. WTLS Çözüm Algoritması-2

Adım 1:
1) $\hat{\beta}=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y}$ kestirimini bul. Bunu yaklaşık değer olarak ata; $\beta_0=\hat{\beta}$.
2) Hata matrisinin ilk yaklaşık değeri için sıfır matrisi öngör; $\mathbf{E}_{A,0}=\mathbf{0}$.

i=1, 2,… için tekrarla:

Adım 2:
Aşağıdakileri hesapla;

$\mathbf{Q}_{1,i}=\mathbf{Q}_y+(\beta_{i-1}^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_A(\beta_{i-1}\otimes\mathbf{I}_n)$

$\tilde{\mathbf{A}}_i=(\mathbf{A}-\mathbf{E}_{A,i-1})$, $\tilde{\mathbf{y}}_i=\mathbf{y}-\mathbf{E}_{A,i-1}\beta_{i-1}$

$\hat{\beta}_i=(\tilde{\mathbf{A}}_i^T\mathbf{Q}_1^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_i)^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_i^T\mathbf{Q}_1^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_i$

$\hat{\lambda}_i=\mathbf{Q}_{1,i}^{-1}(\tilde{\mathbf{y}}_i-\tilde{\mathbf{A}}_i\hat{\beta}_i)$, $\hat{\mathbf{e}}_{A,i}=-\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}_i\otimes\mathbf{I}_n)\hat{\lambda}_i$

$\hat{\mathbf{E}}_{A,i}=\mathrm{invec}\,\hat{\mathbf{e}}_{A,i}$ (Ek-A)

Adım 3:
$\tau_i=\max(|\hat{\beta}_i-\beta_{i-1}|)$ değerini önceden belirlenmiş küçük bir ε hata sınır değeri ile karşılaştır:
1) $\tau_i>\varepsilon$ ise, $\beta_i=\hat{\beta}_i$ ve $\mathbf{E}_{A,i}=\hat{\mathbf{E}}_{A,i}$ ile yeni iterasyona geç.
2) $\tau_i\le\varepsilon$ ise, iterasyonu durdur.

Tablo 3. WTLS Çözüm Algoritması-3

Adım 1:
$\hat{\beta}=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y}$ kestirimini bul. Bunu yaklaşık değer olarak ata; $\beta_0=\hat{\beta}$.

i=1, 2,… için tekrarla:

Adım 2:
Aşağıdakileri hesapla;

$\mathbf{Q}_{1,i}=\mathbf{Q}_y+(\beta_{i-1}^T\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_A(\beta_{i-1}\otimes\mathbf{I}_n)$

$\hat{\lambda}_i=\mathbf{Q}_{1,i}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\beta_{i-1})$,$\mathbf{R}_{1,i}=(\mathbf{I}_u\otimes\hat{\lambda}_i^T)\mathbf{Q}_A(\beta_{i-1}\otimes\mathbf{Q}_1^{-1})$

$\hat{\beta}_i=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{1,i}^{-1}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{1,i}^{-1}\mathbf{y}+\mathbf{R}_{1,i}\mathbf{Q}_{1,i}\hat{\lambda}_i)$

Adım 3:
$\tau_i=\max(|\hat{\beta}_i-\beta_{i-1}|)$ değerini önceden belirlenmiş küçük bir ε hata sınır değeri ile karşılaştır:

1) $\tau_i>\varepsilon$ ise, $\beta_i = \hat{\beta}_i$ ile yeni iterasyona geç.

2) $\tau_i\leq\varepsilon$ ise, iterasyonu durdur.

e. WTLS Çözümü Sonrasında Varyans Bileşen Kestirimi

İteratif işlem sonucunda m. iterasyonda bilinmeyenler vektörünün WTLS çözümü elde edilmiş olsun:

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_m \tag{45}$$

Bu çözüm kullanılarak, (28), (29), (31) ve (32) eşitliklerinden hata vektörleri kestirilir:

$$\hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{Q}_y\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\beta}) \tag{46}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_A = -\mathbf{Q}_A(\hat{\beta}\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{Q}_1^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{A}\hat{\beta}) \tag{47}$$

Schaffrin ve Wieser (2008)'e göre bilinmeyen varyans bileşeni kestirimi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_y^T\mathbf{Q}_y^{-1}\hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_A^T\mathbf{Q}_A^{-1}\hat{\mathbf{e}}_A}{n-u} \tag{48}$$

dir. Ancak bu kestirici yansız değildir. Shen vd. (2011) ve Xu vd. (2012) söz konusu problemi, ilgili varyans bileşen kestirimine "bias-düzeltmesi" getirerek çözmektedirler. Ancak bu çalışmalarda söz konusu bias-düzeltmesi oldukça küçüktür ve birçok çalışmada (48) ile verilen bileşen, kestirimlerin standart sapmalarının tespiti için kullanılmaktadır (Snow, 2012; Amiri-Simkooei ve Jazaeri, 2012).

Sonuçta, düzeltilmiş katsayılar matrisi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{E}}_A \tag{49}$$

olmak üzere, bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi

$$\mathbf{Q}_{\hat{\beta}} = (\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{Q}_1^{-1}\tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tag{50}$$

ve kovaryans matrisi

$$\mathbf{C}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2(\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{Q}_1^{-1}\tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tag{51}$$

elde edilir (Amiri-Simkooei ve Jazaeri, 2012).

4. AFİN DÖNÜŞÜMDE WTLS ÇÖZÜMÜ

XY (hedef) dik koordinat sistemi ile xy (başlangıç) dik koordinat sistemi arasında Afin dönüşümü eşitlikleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X=t_x+k_1x-k_2y \quad \text{ve} \quad Y=t_y+k_3y+k_4x \tag{52}$$

Burada, t, ilgili koordinat eksenindeki ötelemeyi; k'lı terimler ise diğer Afin dönüşümü parametrelerini göstermektedir.

Her iki sistemde p>3 adet eşlenik nokta koordinatları ve bunların kovaryans matrisleri

$\mathbf{y}=[X_1\ Y_1 \ldots X_p\ Y_p]^T$, $\mathbf{C}_y=\sigma^2\mathbf{Q}_y$

$\mathbf{x}=[x_1\ y_1 \ldots x_p\ y_p]^T$, $\mathbf{C}_x=\sigma^2\mathbf{Q}_x$

ile ifade edilirse, (17) EIV modelinin fonksiyonel kısmı

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_p \\ Y_p \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} - \underbrace{\begin{pmatrix} e_{X_1} \\ e_{Y_1} \\ \vdots \\ e_{X_p} \\ e_{Y_p} \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_x} = (\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ \vdots \\ 1 & 0 & x_p & -y_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_p & y_p \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} - \ldots$$

$$\ldots \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{x_1} & -e_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x_1} & e_{y_1} \\ \vdots \\ 0 & 0 & e_{x_p} & -e_{y_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x_p} & e_{y_p} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_A}) \underbrace{\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}}_{\beta} \tag{53}$$

ve stokastik kısmı

$$\mathbf{C}=\sigma^2\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_A \end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}\mathbf{Q}_x\mathbf{J}^T \end{pmatrix} \tag{54}$$

biçiminde oluşturulur. $nu\times n=8p\times 2p$ boyutlu $\mathbf{J}$ matrisi, $\mathbf{e}_x$ hata vektörünü $\mathbf{e}_A=\text{vec}(\mathbf{E}_A)$ hata vektörüne dönüştürür:

$$\mathbf{e}_A=\text{vec}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{x_1} & -e_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x_1} & e_{y_1} \\ \vdots \\ 0 & 0 & e_{x_p} & -e_{y_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x_p} & e_{y_p} \end{pmatrix}) = \ldots$$

$$\cdots\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \mathbf{e}_x \\ \mathbf{0}_n \mathbf{e}_x \\ \mathbf{D}_1 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{D}_3 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{D}_4 \mathbf{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n \\ \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{D}_4 \end{pmatrix} \mathbf{e}_x = \mathbf{J}\mathbf{e}_x \qquad (55)$$

Burada, $\mathbf{D}_j$, k_j bilinmeyen dönüşüm parametresine ilişkin $n\times n=2p\times 2p$ boyutlu bir permütasyon matrisidir:

$$\mathbf{D}_j=\mathbf{I}_p\otimes\mathbf{K}_j \quad (j=1,2,3,4) \qquad (56)$$

2×2 boyutlu **K** matrisleri ise aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (57)$$

Böylece (53) ve (54) eşitliklerine göre EIV modeli oluşturulur ve bir önceki bölümde verilen WTLS çözüm algoritmalarından biri kullanılarak bilinmeyenler ve her iki koordinat sistemindeki koordinat hataları kestirilir.

5. SAYISAL UYGULAMA

Sayısal uygulama için koordinatları Demirel (2009)'da verilen 6 noktalı bir Afin dönüşümü problemi düşünülmüştür. Koordinatlar ve bunların probleme sonradan eklenen ağırlıkları Tablo 4'de verilmektedir.

Tablo 4. Hedef ve başlangıç sistemi koordinatları ve ağırlıkları

	HEDEF SİSTEM			
i	X_i (m)	Y_i (m)	P_{Xi} (m^{-2})	P_{Yi} (m^{-2})
1	4527754,612	434244,302	1,0	2,0
2	4529097,150	432427,995	5,0	2,0
3	4537389,003	434023,394	10,0	1,0
4	4533316,751	429750,773	5,0	2,0
5	4534306,216	426390,182	4,0	0,5
6	4530615,243	427898,173	4,0	10,5
	BAŞLANGIÇ SİSTEMİ			
i	x_i (m)	y_i (m)	P_{xi} (m^{-2})	P_{yi} (m^{-2})
1	-12681,216	-11115,112	30,0	10,0
2	-10849,480	-9793,890	4,0	20,0
3	-12348,250	-1484,610	50,0	1,6
4	-8123,500	-5605,860	50,0	2,4
5	-4751,710	-4655,920	1,3	3,2
6	-6302,628	-8328,789	1,4	36,0

Öncelikle yalnız hedef sistemi (XY) koordinatları hatalıymış gibi ele alınarak dengeleme hesabında bilinen yoldan ötelemeler ve diğer dönüşüm parametreleri hesaplanmıştır. Tablo 5'de "En Küçük Kareler" sütununda gösterilen bu kestirim değerleri WTLS algoritmaları için gereken ilk yaklaşık değerler olarak alınmıştır. Daha sonra bir önceki bölümde verilen açıklamalara uygun olarak ilgili EIV model oluşturulmuştur. Bu modelde iki sistemin koordinat kofaktör matrisleri $\mathbf{Q}_y$ ve $\mathbf{Q}_x$ (58), koordinatların Tablo 4'de verilen ağırlıklarından

$$\mathbf{Q}_y=\mathbf{P}_y^{-1}\ ,\ \mathbf{P}_y=\mathrm{diag}(P_{X1}\ P_{Y1}\ldots P_{X6}\ P_{Y6})$$
$$\mathbf{Q}_x=\mathbf{P}_x^{-1}\ ,\ \mathbf{P}_x=\mathrm{diag}(P_{x1}\ P_{y1}\ldots P_{x6}\ P_{y6}) \qquad (58)$$

şeklinde bulunmuştur. WTLS algoritmalarında iterasyonların yakınsamalarının kontrolü için hata sınır değeri ε, 10^{-12} alınmıştır. Her üç algoritma da 3. iterasyonda saniyelik bir hesap zamanında sonuca yakınsamış ve üçünden de aynı sonuçlar elde edilmiştir. Parametre kestirim değerleri Tablo 5'de, her iki koordinat sisteminin hata kestirimleri ise Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 5. En küçük kareler ve WTLS ile elde edilen parametre kestirim değerleri

Parametre	Kestirim Değeri	
	En Küçük Kareler	WTLS
t_x (m)	4539017,4190	4539017,4352
t_y (m)	421692,5469	421692,6166
k_1	0,011647225402	0,011651721608
k_2	-1,000003341129	-0,999998393604
k_3	-0,999994105682	-0,999985855098
k_4	0,011640379341	0,011637345558

En küçük kareler ve WTLS çözümleri sonucunda elde edilen ötelemeler arasında 1,6 ve 7 cm gibi farklar gözlenmektedir. Diğer yandan,

$$\lambda_x=\sqrt{k_1^2+k_3^2},\ \lambda_y=\sqrt{k_2^2+k_4^2}\ ) \qquad (59)$$

şeklindeki ölçek çarpanlarını (59) düşündüğümüzde her iki çözüm arasında yaklaşık 5-8 ppm'lik bir ölçek değişimi olduğu görülmektedir. Böylesi bir fark iki sistem koordinatları arasında her 1 km'de cm mertebesinde belirsizliğe neden olur.

Yanı sıra, her iki çözümden elde edilen varyans bileşen kestirimleri şöyledir;

En küçük kareler; $\hat{\sigma}^2$=0.035266586611,

WTLS ; $\hat{\sigma}^2$=0.012475937055

(10) ve (51) eşitliklerine göre elde edilen parametre standart sapma değerleri Tablo 7'de verilmektedir. Buradan WTLS çözümünün daha küçük standart sapmalı sonuçlar üretmiş olduğu görülmektedir.

Tablo 6. WTLS sonucunda nokta koordinatlarının hata kestirim değerleri

	HEDEF SİSTEM	
i	$\hat{e}_{X_i}$ (m)	$\hat{e}_{Y_i}$ (m)
1	0,026335508456	-0,000806861723
2	0,003436019968	0,017848736300
3	0,007442742336	-0,021129326562
4	-0,058543186243	0,009588529509
5	0,026284431411	0,076344315872
6	0,017408793482	-0,006695584717
	BAŞLANGIÇ SİSTEMİ	
i	$\hat{e}_{x_i}$ (m)	$\hat{e}_{y_i}$ (m)
1	-0,000064018488	-0,002631668669
2	0,008874197481	-0,000879774803
3	-0,000439924706	-0,046363384075
4	0,000451748646	0,121871787890
5	0,028420448065	-0,032994306045
6	-0,050795724820	-0,001911580953

Tablo 7. En küçük kareler ve WTLS ile elde edilen parametre standart sapmaları

Parametre	Standart Sapma	
	En Küçük Kareler	WTLS
t_x (m)	0,1549	0,1215
t_y (m)	0,2092	0,1670
k_1	0,000012766348	0,000011320243
k_2	0,000011091706	0,000011032937
k_3	0,000017637742	0,000015787378
k_4	0,000020297539	0,000013057698

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Dengeleme hesabı açısından, EIV model, "katsayıların da rasgele hatalı olduğu dengeleme modeli" olarak tanımlanabilir. İstatistikte daha çok regresyon analizinde karşılaşılan bu model, haritacılık faaliyetlerinde benzerlik (Helmert) ve Afin koordinat dönüşümü gibi problemlerde önemli olmaktadır. Bilindiği üzere eşlenik nokta koordinat sayısının dönüşüm parametrelerinden fazla olması durumunda çözüm en küçük kareler yöntemiyle gerçekleştirilir. Klasik dengeleme hesabı ile uyumlu olması için, burada yalnız bir sisteme ilişkin koordinatların rasgele hatalı olduğu varsayılır. Aslında yalnız bir sistemin koordinatları değil diğer sistemin de koordinatları rasgele hatalı değerlerdir. Bunun sonucu olarak dengeleme modelinde geçen katsayılar matrisi rasgele değişkenlerden oluşur. Bu nedenle, söz konusu problemlerde bilinen dengeleme çözümü yerine mutlaka EIV model ve bunun çözümü yani TLS düşünülmelidir. Dahası, ilgili problemde geçen rasgele değişkenlerin kofaktör bilgileri de elimizde bulunuyorsa ağırlıklı TLS yani WTLS çözümü göz önüne alınmalıdır.

Geliştirildiği 2008 yılından bu yana jeodezide yoğun bir ilgi gören WTLS çözümü iteratif bir çözümdür: Modelde geçen tüm hataların ağırlıklı karelerinin toplamını belli bir koşul altında minimum yapan bilinmeyen parametreler belli bir yaklaşık değerden başlanarak iteratif olarak kestirilir. Çalışmada bu amaçla geliştirilmiş üç algoritma irdelenmiştir. Algoritmalar bir Afin dönüşümü uygulamasında denenmiştir. Uygulamadan şu sonuçlar çıkmaktadır: 1) Üç algoritma hem hız hem de doğruluk bakımından özdeştir. Bir programlama dilinde yazılacak bir program ile hızlıca çalıştırılabilir; başka problemlere kolayca uyarlanabilirler. 2) WTLS çözüm sonuçlarını en küçük kareler çözüm sonuçlarıyla karşılaştırdığımızda, dönüşüm parametrelerinin belirlenmesinde her iki sistemdeki koordinat hatalarının dikkate alınması gerektiği görülür.

EK-A: vec ve invec operatörleri

Bir m×n boyutlu **A** matrisi, **A**=[$\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ …$\mathbf{a}_n$] şeklinde, m×1 boyutlu **a** vektörlerinden oluşuyorsa, vec operatörü

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \tag{A1}$$

işlemini gerçekleştirir.

invec operatörü ise (A1)'deki mn×1 boyutlu vektörden m×n boyutlu **A** matrisinin elde edilmesini yani vec operatörünün tersini ifade eder.

EK-B: Kronecker (⊗) çarpımı

Bir m×n boyutlu **A**=(a_{ij}) matrisi ve p×q boyutlu **B** matrisi için aşağıdaki biçimde yapılan çarpıma Kronecker çarpımı denir:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \text{(B1)}$$

A⊗B matrisi, mp×nq boyutlu olur.

KAYNAKLAR

Amiri-Simkooei, A. ve Jazaeri, S., (2012), **Weighted total least-squares formulated by standard least squares theory**, Journal of Geodetic Science 2(2): pp.113-124.

Carroll, R.J. ve Ruppert, D., (1996), **The use and misuse of orthogonal regression in linear errors-in-variables models**, The American Statistician, 50(1): pp. 1-6.

Demirel, H., (2009), **Dengeleme Hesabı**, 3. Baskı, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Fang, X., (2011), **Weighted total least squares solutions for applications in geodesy**, PhD Dissertation, Geodaesie und Geoinformatik Der Leibniz Universitaet Hannover, Hannover.

Fang, X., (2013), **Weighted total least squares: necessary and sufficient conditions, fixed and random parameters**, Journal of Geodesy, 87: pp. 733-749.

Ghilani, C.D. ve Wolf, P.R., (2006), **Adjustment computations: Spatial Data Analysis**, Fourth Edition, John Wiley&Sons Inc., Hoboken, New Jersey.

Gillard, J., (2010), **An overview of linear structural models in errors-in-variables regression**, REVSTAT Statistical Journal, 8(1): pp. 57-80.

Golub, G.H. ve Van Loan, C.F., (1980), **An analysis of the total least squares problem**, SIAM J. Numer. Anal., 17(6): pp. 883-893.

Koch, K.R., (1999), **Parameter estimation and hypothesis testing in linear models**, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

Lu, Y., (2012), **Performing improved two-step camera calibration with weighted total least-squares**, Int. Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Siennces, Vol. XXXIX-B6, XXII ISPRS Congress, Melbourne, Australia, 141-146.

Mahboub, V., (2012), **On weighted total least-squares for geodetic transformation**, Journal of Geodesy, 86(5): pp. 359-367.

Neitzel, F. ve Petrovic, S., (2008), **Total least squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der ausgleichenden Geraden**, Z für Vermessungswesen, 133: pp. 141-148.

Neitzel, F., (2010), **Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation**, Journal of Geodesy, 84(12): pp. 751-762.

Paris, Q., (2004), **Robust estimators of errors-in-variables models-Part I**, Working Paper, No. 04-007, Department of Agricultural and Resource Economics, University of California, Davis.

Schaffrin, B. ve Felus, Y.A., (2008), **On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformation. Three algorithms**, Journal of Geodesy, 82: pp. 373-383.

Schaffrin, B. ve Wieser, A., (2008), **On weighted total least-squares adjustment for linear regression**, Journal of Geodesy, 82: pp. 415-421.

Schaffrin, B. ve Snow, K., (2010), **Total least-squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth**, Linear Algebra and its Applications, 432(8): pp. 2061-2076.

Schaffrin, B. ve Uzun, S., (2012), **On the reliability of errors-in-variables models**, Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica, 16(1): pp. 69-81.

Schaffrin, B., Neitzel, F., Uzun, S., Mahboub, V., (2012), **Modifying Cadzow's algorithm to generate the optimal TLS-solution for the structured EIV-model of a similarity transformation**, Journal of Geodetic Science, 2(2): pp. 98-106.

Shen Y., Bofeng, L., Chen Y., (2011), **An iterative solution of weighted total least-squares adjustment**, Journal of Geodesy, 85(4): pp. 229-238.

Snow, K., (2012), **Topics in total least-squares adjustment within the errors-in-variables model: Singular cofactor matrices and prior information**, Report No. 502, Geodetic Science Ohio State University, Columbus, Ohio.

Tong, X., Jin, Y., Li, L., (2011), **An improved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation**, Journal of Surveying Engineering, 137(4): pp. 120-128.

Van Huffel, S., (2004), **Total least-squares and errors-in-variables modeling: Bridging the gap between statistics, computational mathematics and engineering**, COMPSTAT 2004 Symposium, Physica-Verlag/Springer: pp. 1-16.

Xu, P., Liu, J., Shi, C., (2012), **Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models: algorithm and statistical analysis**, Journal of Geodesy, 86(8): pp. 661-675.