Laplace denklemi nazarı itibara alınarak yapılan Astronomik - Jeodezik şebeke muvazenesi hakkında mütalâalar

Yazan :
H. Wolf

Çeviren :
Yk. Müh. Ekrem Ulsoy

Bu yazıda, Helmert'in Astronomik - Jeodezik şebeke hesaplarından başlanarak, prensip itibarile ayrı ayrı nazarı itibara alınmakta olan, şebeke ve şakul inhirafı denklemlerine ait problemlerin, esas itibarile, genel bir problemin özel halleri olduğu gösterilmektedir. Burada Laplace denkleminin, her ikisi arasında, birleşdirici bir rolü vardır.

Bundan başka Laplace kapanma hatasının bazı hassaları izah edilmiştir. Bunun neticesi olarak da, Helmert'in hesap tarzını daha büyük sistemlere, müteakip takribiyetler vasıtasile, tatbik etmeği hedef tutan, bir metot gösterilmiştir.

Astronomik mevki tayinine ait rasat neticeleri - eğer gereken derecei sıhhatı haiz iseler - büyük jeodezik şebekelerin derecei sıhhatını arttırmak, yani deformasyondan korumak, ve nirengi hesaplarına esas olmak üzere alınan Elipsoid üzerindeki cihetlenmesini emniyet altına almak hususunda en iyi donelerdir.

I Genel Hususlar

İçinde esas jeodezik ölçülerden - açı ve mesafe - başka astronomik olarak tayin edilen değerler bulunan jeodezik nirengi şebekesini hesaplama problemi, genel olarak, şu şekilde ifade edilebilir :

Bilinenler veya ölçülenler :

a) Nirengi şebekesinin ω açıları veya istikametleri,

a) Üçgen kenarlarının S uzunlukları,

c) Coğrafi arzı B, coğrafi tulü L ve coğrafi semti A olan noktalarda astronomik olarak tayin edilen φ, λ, α.

Aranılanlar :

Nirengi noktalarının en iyi referans elipsoidine nazaran ko. kordineleri.

Genel olarak ölçülen değerler lüzumunden fazladır. Binaenaleyh problemin çözümü için muvazene hesaplarından sarfı nazar edilemez. Bu sebekle rasat kıymetleri olan $l^{(b)}$ ler hatasız farz edilemezler. $l^{(b)}$ lerin her birine v gibi bir tashih mıkdarı getirilir. Şu halde bir ölçünün $l^{(a)}$ muvazeneli değeri:

$$l^{(a)} = l^{(b)} + v \tag{1}$$

olur. Bu suretle v tashih mıkdarları, rasat sisteminden muvazeneli değerler sistemine geçmeği temin ederler. Burada, gerek jeodezik gerekse astronomik ölçüler tashih edildiklerinden, yapılan hesaba, astronomik-jeodezik şebeke muvazenesi denir.

Evvelcede zikredildiği veçhile, aranılan koordineler bir referans elipsoidine nisbet edildikleri halde astronomik ölçüler, rasat yapılan noktalardan geçtiği farz olunan, nivo satıhlarına nisbet edilirler. Buradan θ şakul inhirafı mefhumu doğar. Bilindiği üzere bundan maksat, rasat yapılan noktada elipsoid normali ile hakiki şakul istikameti (nivo sathına dik) arasındaki açıdır. (1)

θ şakul inhirafı mürekkiplere ayrılabilir, en iyisi ζ şimal cenup ve η şark garp mürekkiplerine ayırmaktır.

Şu halde:

$$\theta^2 = \zeta^2 + \eta^2 \tag{2a}$$

olur. Keza bir P astronomi noktası için şu münasebetler caridir. (2) :

$$\zeta_i = \varphi_i - B_i \tag{2 b}$$

$$\eta_i = (\lambda_i - L_i) \cos B_i \tag{2 c}$$

veya

$$\eta_i = (\alpha_i - A_i) \operatorname{cotg} B_i \tag{2 d}$$

Bu formüllerde B_i, L_i, A_i intihap edilen referans eliproidine,

(1) E. Kohlschütler, Die Definition der ellipsoidischen koordinaten. Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme 1931/32 S 102.

(2) Jordan - O. Eggert, Handbuch der vermessungskunde, 3 Bd. 2. Halbbd. Stuttgart 1941. S. 416.

φ_i, λ_i, α_i de nivo sathına tekabül ederler. Veya :

$$B_i = \varphi_i - \zeta_i \tag{2 e}$$

$$L_i = \lambda_i - \eta_i \sec B_i \tag{2 f}$$

$$A_i = \alpha_i - \eta_i \operatorname{tg} B_i \tag{2 g}$$

olur.

Görülüyorki şakul inhirafları, doğrudan doğruya ölçülebilen astronomik değerleri sisteminden elipsoid (veya jeodezik) sistemine geçmeği temin etmektedirler.

Nirengi şebekelerinde, şebekenin şeklinde bilistifade istihraç edilebilen ve muvazeneli değerler arasında tam olarak tahakkuk etmesi icap eden f şart denklemleri mevcuttur:

$$f_1\,(l_1^{(a)},\ l_2^{(a)} \ldots\ldots c_1) = 0$$

$$f_2\,(l_1^{(a)},\ l_2^{(a)} \ldots\ldots c_2) = 0 \qquad v\text{-}s.$$

Clarke ve F. R. Helmert'e göre bu problemin çözümünde:

$$\left[\frac{v^2}{m_v^2}\right] = \text{min.} \tag{3a}$$

$$[\theta^2] = \text{min.} \tag{3b}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{3c}$$

olacaktır. Burada m_v, v nin vasati hatasıdır. Şu halde mesele, şartlı bir minimum problemidir ki bunun halli Lagrange tarafından gösterilmiştir.

Burada şayanı dikkat olan nokta şudur:

(3a) denklemi, muvazeneli değerlerin en muhtemel değerlerini temin ettiği halde, (3b) ile elipsoid ve nivo satıhlarını yekdiğerine tekabül ettirmek gibi bir gayeyi haiz pratik bir hesap tarzı elde edilmektedir.

Şu halde (3b) denklemi, jeofizik bir farazıye karakterini haizdir. Fakat (3b) faraziyesi yerine başka ve daha iyi bir faraziye ikame edilip edilemiyeceği de münakaşa edilebilir. Meselâ :

a) Helmert'in şakul inhirafı tarifi yerine P. Pizetti nin teklif ettiği tarif kullanılabilir. (1) Buna nazaran geoid sathı üzerinde olmayan astronomik rasatları, şakul istikametinin inhinasını nazarı itibare almak suretile, arz sathından deniz sathına (geoid) irca etmek lâzımdır.

b) Astronomik rasatlara, Pratt'ın kitle muvazenesi faraziyesine istinaden, topoğrafik - izostatik tashihler getirilebilir.

c) Astronomik istasyonlar nirengi şebekesinde gayri muntazam bir şekilde dağılmış bulunuyorlarsa, bazı vezinler kabul ederek, nokta kesafetı mütecanis bir hale getirilebilir. Bu suretle münferid noktaların netice üzerine tesiri, mevziî nokta kesafetinin artması nisbetinde azalır.

d) Şakul inhiraflarının kareleri toplamı asgarî olacak yerde, geoidin elipsoidden olan N mesafelerinin karelerinin toplamı asgarî yapılabilir.

İlk olarak zikredilen Clark - Helmert nazariyesi şüphesiz en az hesabı icap ettiren bir faraziyedir. (Bu faraziye aşağıdaki mütalâalara da esas teşkil edecektir.) Görülüyorki, (3 b) ifadesinin kullanılması veya yerine başka bir şeyin konulması, problemin jeofizik tarafını tebaruz ettirmektedir. Bunun esası ve riyazi şekli hakkında karar verdikten sonra jeofizik kısım tesbit edilmiş olur. Problemin bundan sonraya ait kısmı yalnız riyazî karakteri haizdir. (3 a), (3 b), (3 c) ile meselenin çözümü muayyen olur ve bunun için muvazene esaslarından veya Lagrenge'ın hesap tarzından istifade edilebilir.

II. Problemin doğrudan doğruya çözümü

F. R. Helmert esas itibarile iki şekil göstermiştir:

A) Muvazene nokta nokta yapılır. Bu suretle, I. inci derece nirengi noktalarından müteşekkil, satıh seklinde, bir şebeke elde

(1) Jordan - Eggert, Handbuch der vermessungskunde, 3 Bd. 2. Halbbel stuttgart 1941. S. 416.

edilmiş olur. Muvazene, mutavassıt rasatlar usulüne göre (coğrafi koordine) yapılır. (1).

B) Şebeke esas bir çerceve şebekesi ile muhtelif tali dolgu şebekelerine ayrılır. Esas mesele, çerçeve şebekesinin muvazenesidir. Muvazene şartlı muvazene usulüne göre yapılır (2). Bu metoddaki takribiyet bilâhara O. Eggert tarafından giderilerek, tam ve kat'i şekle sokulmuştur (3). Muvazene ameliyesi şu kısımlara ayrılabilir.

1. Esas şebeke kısımlara (Zincirler) ayrılır. Bu zincirler düğüm noktalarında birleşirler.

2. Zincirler müstakil olarak muvazene edilir. Zincirin başı ile sonunu birleştiren jeodezi hattı bir fonksiyon halinde ifade edilir. Buna ait vezinler de bulunur.

3. Ana muvazene şartlı muvazene usulüne göre yapılır. Helmert'in doğrudan doğruya çözümünde referans elipsoidinin eb'adının değişiklikleri ile mebde noktasına ait şakul inhirafı mürekkiplerinin evvelâ, tashih mikdarları ile beraber, gayri muayyen parametr şeklinde ifade edilmeleri çok karakteristiktir. Helmert bunları korelatlarla beraber, meçhul olarak, hesaba sokmaktadır. Her noktadaki şakul inhirafı mürekkipleri olan ζ ve η lar da tashih mikdarlarından vücuda geldiklerinden, şakul inhiraflarını, adedi bir kıymet ile beraber, bu 4 gayri muayyen parametrin hattı bir kombinasyonu şeklinde, göstermek mümkündür. Netice itibarile bunlar o şekilde tahavvül ettirilirki (3 b) şartı tahakkuk etsin. Bütün düğüm noktalarının muvazeneli elipsoid koordineleri bulunduğu zaman ana muvazene gayesine erişmiş olur.

4. Ana muvazeneden sonra aradaki zincirler, düğümler arasına yerleşdirilir ve koordineleri hesaplanır. Bu, her ne kadar öyle görünüyor ise de, rabıt şartlı bir muvazene değildir. Bilâkis

(1) F. R. Helmert Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodasie. Leipzig 1880 I. Teil S. 560.

(2) F. R. Helmert, Lotabweichungen, Heft I. Berlin 1886.

(3) W. Jordan-O Eggert, a. a. S. 453.

netice, zincirler ana muvanene ile birlikte topdan muvazeneye tâbi tutuldukları zaman elde edilecek neticenin aynıdır. Eggert bunu eserinde izah etmektedir (jordan - Eggert 3 Bd II s. 453).

Madde 3 de zikredilen ana muvazenede, zincirlerin bir şebeke teşkil etmelerini temin eden, bir takım şart denklemleri kurulur. Bunlar arasında Laplace denklemleri hususî önemi haizdirler. Laplace denklemleri şu suretle elde edilir:

Şakul inhirafının, tul ölçülerinde elde edilen, şark - garp münekkibini $\eta\lambda$ ve semt ölçülerinden elde edileni de $\eta\alpha$ ile gösterelim. (2c) ve (2d) ye göre:

$$\eta\lambda_i = (\lambda_i - L_i)\cos.\ B_i \qquad (4a)$$

$$\eta\alpha_i = (\alpha_i - A_i)\ \mathrm{cotg}.\ B_i \qquad (4b)$$

Laplace denklemine göre:

$$\eta\lambda_i = \eta\alpha_i \qquad (5a)$$

veya

$$(\lambda_i - L_i)\cos B_i = (\alpha_i - A_i)\ \mathrm{cotg}\ B_i \qquad (5b)$$

$$(\lambda_i - L_i)\ \mathrm{sın}\ B_i = \alpha_i - A_i$$

olur. Hesap esnasında iki hususu nazarı itibara almak lâzımdır.

a) α ve λ ölçüleri hatalıdırlar ve bunlera $\delta\alpha$ ve $\delta\lambda$ tashih mıkdarlarını getirmek lâzımdır.

b) Muvazeneden evvel kat'i elipsoid koordineleri olan B, L ve A malûm değildir. Ancak B°, L°, A° takribi kıymetleri malûm olabilir ki, bunların kat'i kıymetlerden farkları ΔB, ΔL, ΔA ise:

$$L_i = L_i^\circ + \Delta L_i \quad \text{ve} \quad A_i = A_i^\circ + \Delta A_i \qquad (6)$$

yazılabilir.

B°, L°, A° takribi değerler sisteminin, muvazenesiz açılarla yapılan koordine hesabile elde edildiğini farz edeceğiz. Şu halde:

$$\alpha_i + \delta\alpha_i - A_i^\circ - \Delta A_i - (\lambda_i + \delta\lambda_i - L_i^\circ - \Delta L_i)\ \mathrm{sın}\ B_i = 0$$

veya:

$$\delta\alpha_i - \delta\lambda_i\ \mathrm{sın}\ B_i - \Delta A_i + \Delta\lambda_i\ \mathrm{sın}\ B_i + w_i^\circ = 0 \qquad (7a)$$

olur. Burada:

$$W_i^\circ = \{(\alpha_i - A_i^\circ) - (\lambda_i - L_i^\circ)\ \mathrm{sin}\ B_i\} \qquad (7\ b)$$

veya :

$$W_i^\circ = \{ (\alpha_i - (\lambda_i - L_i^\circ) \sin B_i) - A_i^\circ \} \qquad (7\ c)$$

dır.

Buradaki sın B_i yerine, sıhhat derecesinden fedakârlık etmeden :

$$\text{sın } B_i \approx \text{sın } B_i^\circ \approx \text{sın } \varphi_i$$

yazılabilir.

W_i°, takribi B°, L°, A° sistemine nazaran, Laplace kapanma hatasını gösterir. W_i° Laplace kapanma hatası, (7 b) yazılışı ile $\eta\alpha_i$ ve $\eta\lambda_i$ sın B_i şakul inhirafı mürekkiplerinin farkına müsavidir. (7 c) yazılışı ise şunu ifade eder: Astronomik semt, şakul inhirafi mürekkibinden ($\lambda_i - L_i^\circ$) ile kurtarılır ve bu suretle tashih edilen astronomik semte «Laplace semti», yani $\alpha_i - (\lambda_i - L_i)$ sın B_i, denirse, bu takdirde Laplece kapanma hatası, Laplace semti ile buna ait takribi jeodezik A_i° semti arasında fark olur.

ΔL ve ΔA farkları, B°, L°, A° takribi sisteminin :

a) dL_i ve dA_i gibi paralel kayma ve dönmesi ile,

b) δL ve δA tahavvil miktarlarına tekabül eden şekil değişmesinden hasıl olmuş farz edilebilir. a maddesindeki dL_i ve dA_i mebde noktasının dB_o, dL_o, dA_o tahavvülâtı cinsinden ifade edilebilir. Bu esnada elipsoid eb'adını değiştirmekten sarfı nazar edilir. Şu halde :

$$dL_i = \frac{\partial L_i}{\partial L_o} dL_o + \frac{\partial L_i}{\partial B_o} dB_o + \frac{\partial L_i}{\partial A_o} dA_o$$

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial L_o} dL_o + \frac{\partial A_i}{\partial B_o} dB_o + \frac{\partial A_i}{\partial A_o} dA_o$$

(b) maddesinde zikredilen şebekenin şeklindeki değişikliğin Laplace denklemi üzerine $-\delta A_i + \delta L_i \cdot$sın B_i mıkdarında olan tesiri, bazı tashih mıkdarlarının $[\bar{t}v]$ gibi hattı kombinezonu halinde ifade edilebilir. Zira B°, L°, A° muvazenesiz, B, L, A ise muvazeneli açılarla hesaplanmışlardır.

Takribi olarak:

$$\frac{\partial L_i}{\partial L_o} \sin B_i - \frac{\partial A_i}{\partial L_o} = \sin B_i$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial B_o} \sin B_i - \frac{\partial A_i}{\partial B_o} = -\sin (L_i - L_o) \cos B_i$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial A_o} \sin B_i - \frac{\partial A_i}{\partial A_o} = \Delta_i - 1$$

dır. Burada:

$$\Delta_i = \frac{S^2_{o,i}}{2R^2_{o,i}} \quad \text{dır.}$$

$S_{o,i} = P_i P_o$ jeodezi hattının uzunluğu

$R_{o,i} = 0$ bölge için vasati nısıf kutru inhina.

Buna göre (7a):

$$\delta\alpha_i - \delta\lambda_i \sin B_i + [\bar{t}v] + \sin B_i \, dL_o + \sin (L_i - L_o) \cos B_i \, (-dB_o) + (1 - \Delta_i)(-dA_o) + w_i^o = 0 \qquad (8)$$

F. R. Helmert'in hesabında dB_o, dA_o mıkdarları P_o merkez noktasının ζ_o, η_o şakul inhirafları cinsinden ifade edilmişlerdir ki burada bundan sarfı nazar edilmiştir. (8) denklemi ikinci bir PK noktası için yazılır ve bu iki denklem yekdiğerinden çıkarılırsa P_i ve PK noktaları arasındaki jeodezi hattına ait Laplace denklemi elde edilmiş olur:

$$\partial_i - \partial_k + [tv] + (\sin B_i - \sin B_k)\, d L_o + (-d B_o)(\sin (L_i - L_o) \cos B_i - \sin (L_k - L_o) \cos B_k) + (-d A_o)(\Delta_k - \Delta_i) + W^o_i - W^o_k = 0 \qquad (9)$$

Burada:

$$\partial = \partial\alpha - \partial\lambda \sin B \qquad t = \bar{t}_i - \bar{t}_k \quad \text{dır.}$$

A. Berroth (1) a göre (8) ifadesine «Laplace hata denklemi» ve (9) ifadesine de «Laplace şart denklemi» denir.

F. R. Helmert P_i yi P_o a getirmekte ve dL_o, dB_o, dA_o veya ζ_o. η_o a ait emsalleri, yekdiğerini takip eden ifna ameliyeleri ile. buradakinden bir az daha hassas bir surette, elde etmektedir.

A. Berroth, Die Übertragung von Richtungen in Weite Fernen. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1938, s, 377

Ana muvazenenin diğer şart denklemleri (bunlar arasında poligon şartları) ile beraber Laplace şartlarından bilistifade normal denklemler kurulur ve çözülür. Hesabın bundan sonrası başlangıçda izah edildiği gibi (yukarıda madde 3) yapılır.

III Endirek çözüm

Büyük bölgelerin hesabına ait aşağıda endirek bir çözün imkânı araşdırılacaktır.

F. R. Helmert'in doğrudan doğruya çözümüne ait (II, 3) deki çözüm yolunu ikiye ayıralım:

a) v ve ∂ lanın tayin edildiği ve dB_o, dL_o, dA_o ın sabit farz edildiği esas şebeke muvazenesi,

b) «Şebeke oryantasyonu» veya «şakul inhirafi muvazenesi». Bu kısımda dB_o, dL_o, dA_o veya ζ_o, η_o tayin edilir ve bu esnada v ler sabit farz olunur. Bu takdirde tecrübî olarak bir tarafdan:

$$\frac{\partial L_i}{\partial B_o} dB_o \leq v_i$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial L_o} dL_o = 0 \qquad (10a)$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial A_o} dA_o \leq v_i$$

yani şebeke muvazenesinin şakul inhirafı muvazenesine gayet az tabi olduğu ve diğer tarafdan:

$$\left[\frac{\partial B_o}{\partial L_i} dv_i\right] \leq dB_o$$
$$\left[\frac{\partial L_o}{\partial L_i} dv_i\right] \leq dL_o \qquad (10b)$$
$$\left[\frac{\partial A_o}{\partial L_i} dv_i\right] \leq dA_o$$

Yani şakul inhirafı muvazenesinin, rasatların az miktarda değişmesine, yani şebekenin şekline gayet az tabi olduğu anlaşılır.

(10 a) ve (10 b) nin sağ tarafları sıfır ise, şebeke muvazenesi ile şakul inhirafı muvazenesi ayrı ayrı yapılabilir. Hakikat halde bunlar genel bir muvazene prensibinin özel halleridir.

Bütün şart denklemleri içinde Laplace denklemi, şebeke ve şakul inhirafı muvazenelerinin yekdiğerine tabi olması bakımından, en fazla tabiiyet gösterenidir. (8) ve (9) dan görüleceği üzere, Laplace kapanma hatası, v, $\partial\alpha$, $\partial\lambda$ (şebeke muvazenesi) veya dB_o, dL_o, dA_o, (Şakul inhirafı muvazenesi) ile giderilebilir. Son üç mikdar sabit olarak alınırsa Laplace denkleminin rolü şebeke muvazenesindekinden ibaret olur. v, $\partial\alpha$, $\partial\lambda$ sabit farz edilirse bu takdirde Laplace denkleminin şakul inhirafı muvazenesindeki şekli elde edilmiş olur. Bu iki ayrı hal aşağıda ayrı ayrı mütalâa edilecektir. Pratik olarak şebeke ve şakul inhirafı muvazeneleri birbirini müteakip yapılmalı ve buna, hesaplar sabit kalıncaya kadar, devam edilmelidir. (10 a) ve (10 b) dolayısile Konvergenz'in kuvvetli olduğu anlaşılır. Bu sebeple bir veya iki hesapla iktifa olunabilir.

a) Şebeke Muvazenesi

dB_o, dL_o, dA_o ın Laplace kapanma hatası üzerine olan tesirini Δw_i ile gösterelim. Yani:

$\Delta w_i = \sin B_i . dL_o + \sin (L_i - L_o) \cos B_i (- dB_o) + (1 - \Delta_i)$ $(- dA_o)$ olsun. Aynı şekilde Δw_k da yazılır ve (9) dan istifade edilirse:

$$\partial_i - \partial_k + [tw] + w_i^o + \Delta w_i - (w_k^o + \Delta w_k) = 0$$

olur.

$$W_{ik} = w_i^o - w_k^o + \Delta w_i - \Delta w_k$$

vaz edersek:

$$\partial_i - \partial_k + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots\dots + t_n v_n + w_{ik} = 0 \qquad (11\ a)$$

olur.

Diğer şart denklemleri de Taylor silsilesi yardımı ile hattı şekle sokulup aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots\cdots + a_n v_n + w_a = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots\cdots + b_n v_n + w_b = 0 \quad \text{v. s.} \end{aligned}\right\} \quad (11\,b)$$

δ_i, δ_k, v_1, v_2 .... v. s. nin vezinleri de P_i ; P_k, P_1, P_2 ... v. s. olsun (11 a), (11 b) şart denklemlerine tekabül eden korelatler K_t, K_a, K_b ... v, s. ise :

$$\left.\begin{aligned} P_i\,\delta_i &= + K_t \\ P_k\,\delta_k &= - K_t \\ P_1\,v_1 &= + t_1 K_t + a_1 K_a + b_1 K_b \ldots. \\ P_2\,v_2 &= + t_2 K_t + a_2 K_a + b_2 K_b \ldots. \quad \text{v. s.} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

yazılabilir. (3a) dan istifade ederek normal denklemler yazılırsa:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{tt}{p}\right] K_t + \left[\frac{at}{p}\right] K_a + \left[\frac{bt}{p}\right] K_b + \cdots\cdots + w_{ik} = 0 \\ \left[\frac{at}{p}\right] K_t + \left[\frac{aa}{p}\right] K_a + \left[\frac{ab}{p}\right] K_b + \cdots\cdots + w_a = 0 \\ \left[\frac{bt}{p}\right] K_t + \left[\frac{ab}{p}\right] K_a + \left[\frac{bb}{p}\right] K_b + \cdots\cdots + w_b = 0 \text{ v.s.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

elde edilir. Buradan hesap edilen K lar (12) de yerine konarak rasatlara getirilecek tashih mıkdarları bulunmuş ve şebeke muvazenesinin gayesi elde edilmiş olur. Şebeke muvazenesinin topdan mı yoksa, F. R. Helmert gibi, iki kısımdan veya O. Eggert (1) ın tarzı üzere daha kat'i olarakmı yapılması lâzım geldiği suali bililtizam cevaplandırılmamıştır.

b) Şakul inhirafı muvazenesi

Bunda esas, Laplace noktalarından gayri noktalarda dahi, her astronomik ölçü için bir şakul inhirafı denklemi yazmaktır:

(1) W. Jenne, Einbeziehung Laplace scher Gleichungen in die geodatische Netzausgleichung nach bedingten Beobachtungen' unter Anwendung des Entwicklungsverfahrens Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme 1933/34 S. 286 ya da bakınız.

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_i &= \varphi_i - (B_i^\circ + dB_i) \approx \frac{\partial B_i}{\partial L_o}(-dL_o) + \frac{\partial B_i}{\partial B_o}(-dB_o) \\
&\quad + \frac{\partial B_i}{\partial A_o}(-dA_o) + \varphi - B_i^\circ \\
\eta\lambda_i \sec B_i &= \lambda_i + \partial\lambda_i - (L_o + dL_i) \approx \frac{\partial L_i}{\partial L_o}(-dL_o) + \frac{\partial L_i}{\partial B_o}(-dB_o) \\
&\quad + \frac{\partial L_i}{\partial A_o}(-dA_o) + \lambda_i + \partial\lambda_i - L_i^\circ \\
\eta\alpha_i \operatorname{tg} B_i &= \alpha_i + \partial\alpha_i - (A_i^\circ + dA_i) \approx \frac{\partial A_i}{\partial L_o}(-dL_o) + \frac{\partial A_i}{\partial B_o}(-dB_o) \\
&\quad + \frac{\partial A_i}{\partial A_o}(-dA_o) + \alpha_i + \partial\alpha_i - A_i^\circ
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

yazılabilir.

$$u_i = -\partial\alpha_i + \partial\lambda_i \quad \sin B_i - [\bar{t}\, v]$$

vaz edersek bu u_i ler şebeke muvazenesinin Laplace kapanma hatasına olan tesirini gösterirler. ((10 a) ve (10 b) dolayısile şakul inhirafı mürekkiplerine olan tesirler nazarı itibara alınmayabilir). Şakul inhirafı ve şebeke muvazenelerinin ayrı ayrı yapılması dolayısile, şakul inhirafı muvazenesinde, şebeke sabit farz olunur. Bu sebeple, şakul inhirafı muvazenesinde, yalnız u_i ler asla giderilemezler. Fakat dB_o, dL_o, dA_o ile beraber, (8) e göre, bir tahavvüle tabi tutulurlar :

$$u_i = \sin B_i\,(-dL_o) + \sin(L_i - L_o)\cos B_i\,(-dB_o) + (1 - \Delta_i)\,(-dA_o) + w_i^\circ \qquad (15)$$

Astronomik noktalarda yalnız arz ve tûl veya arz ve semt ölçülürse, bu takdirde, hiç bir müşkilât yoktur. Fakat tûl ve semtin aynı zamanda ölçüldüğü Laplace noktalarında vaziyet başkadır. Burada η iki defa tayin edilmiş bulunmaktadır. η için $\eta\lambda$ ve $\eta\alpha$ dan teşkil edilmiş herhangi vasati bir kıymet düşünülebilir. Bunun manası o istasyonda Laplace kapanma hatasının daha başlangıçta giderilmiş olduğudur. Bu suretle u nun bir kısmı olan $u\alpha$, semt ölçüsü olan α ve diğer kısmı olan $u\lambda$ da da λ. sın B ye getirilir ve bu suretle her Laplace noktasında $u^2\lambda + u^2\alpha =$ Minimum olur. Şu halde bütün Laplace noktaları için:

$$[u^2\lambda + u^2\alpha] = \text{Minimum}$$

olur. Normal bir ortalama değer alınacak olursa:

$$u\lambda = -u\alpha = \tfrac{1}{2}u \quad \text{ve :}$$

$$[u^2] = \text{Minimum}$$

olur. Bu şart, $[\zeta^2 + \eta^2] =$ Minimum şartına inzimam etmektedir. Bu son iki şartın yekdiğerini takiben yerine getirilmesi tam bir muvazene neticesi vermez. Zira şakul inhirafı muvazenesinden evvel, başlangıçda alınmış olan ζ°, η°. u° ların, aynı sebepden doğan (yani dB_0, dL_0, dA_0) ve bunlar vasıtasile izalesi mümkün, sistematik mürekkipleri mevcut olup olmadığını tesbit etmek mümkün değildir. Binaenaleyh, en küçük kareler metodu bakımından, her iki şartı aynı zamanda tahakkuk ettirmek, yani bir tek minimum şartı halinde ifade etmek lâzımdır.

Bu sebeple gerek (14) şakul inhirafı denklemlerine gerekse (15) Laplace denklemlerine hata denklemi nazarile bakmak ve bunlardan, normal denklemlere geçişe ait malûm hesap tarzile dL_0, dB_0, dA_0 ı hesap etmek icap eder.

Fakat (14) in son iki denklemi ile (15) denklemi yekdiğerine gayri tabi değildirler. Hesap için bunların ancak ikisi kullanılabilir. Üçüncüsü diğer ikisinin neticesidir. Bu üç denklem içinde semt denkleminin, en az vezinli denklem olduğu isbat olunabilir. Şu halde Laplace noktalarında (14) ün arz denklemi ile tul ve Laplace denklemlerini kurmak kâfidir.

$[uu] =$ Minimum şartını, her hangi bir jeofizik faraziyeye rapt etmek iyi değildir. Zira bu, doğrudan doğruya olan metoddaki gibi, muvazene sisteminin lâlettayin iki kısma ayrılnası demektir. Halbuki bu iki kısım, her ne kadar oldukça yekdiğerine gayrı tabi iselerde, tam manasile gayri tabi sayılamazlar. u^2 ları iki kısımda yapılmış olan muvazenenin tam olup olmadığı hakkında bize bir fikir verebilir. Yani şebekenin kaydırılıp döndürülmesi ile beraber ayni zamanda şebeke muvazenesi yeniden yapılmazsa Laplace kapanmaları, hesabın tamamlanıp tamamlanmadığını göstermek bakımından, bir mıkyas olabilir.

ζ, η ile u yekdiğerinden tamamen farklı mıkdarlar olduğundan (şakul inhirafları hakiki ve fiziki bir manası olan mıkdarlardır. Halbuki u lar yekdiğerini takip eden hesaplar esnasında sıfıra yaklaşırlar) bu iki grubu, vezin bakımından, tamamen ayırmak lâzımdır.

$$m_u = \sqrt{\frac{[uu]}{n_n}} \quad \text{u nun vasati kıymeti}$$

$$m\theta = \sqrt{\frac{[\zeta^2+\eta^2]}{n\zeta+n\eta}} \quad \theta \text{ nun vasati kıymeti}$$

olsun. Burada :

$$n_u = u \quad \text{ların sayısı}$$
$$n\zeta = \zeta \quad \text{lerin sayısı}$$
$$n\eta = \eta \quad \text{ların sayısı}$$

dır. En küçük kareler metoduna nazaran, ζ ve η nın vezinleri bir ise u nun vezni :

$$Pu = \frac{m^2\theta}{m_u^2} = \frac{n_u}{n\zeta+n\eta} \cdot \frac{[\zeta^2+\eta^2]}{[u^2]}$$

olur. Pratik hesap için :

$$Pu \approx \frac{n_u}{n\zeta+n\eta} \cdot \frac{[\zeta^{\circ 2}+\eta^{\circ 2}]}{[u^{2\circ}]}$$

almak kâfidir. Yekdiğerini takip eden hesaplar esnasında u sıfıra yaklaşdığından, Pu da aynı nisbette sonsuza yaklaşır. Bu da şakul inhirafları vezinlerinin daima Laplace kapanmasının vezninden küçük olması demektir. Gaye halde, $dB_\circ$, $dL_\circ$, $dA_\circ$ sanki yalnız Laplace hapanması mevcutmuş gibi bulunur.

Gaye hali daha ziyade incelemek faidelidir :

Vezinlerinin fevkalâde küçük olması dolayısile, şakul inhirafı denklemleri nazarı itibara alınmayabilirler. Bu takdirde yalnız, aynı vezinli, Laplace hata denklemleri kalır. Burada da dB_0 ın emsali, dL_0 ve dA_0 ın emsallerinden küçük olduğundan, Laplace denkleminden, dB_0 ın tayini hususunda fazla bir şey beklenemez. Bu sebeple, muvakkat olarak, Laplace kapanma hatalarından bilistifade dB_0, ı tayin etmekden sarfı nazar edilecektir. Şu halde:

$$u_i = \sin B_i \, dL_0 + (1 - \Delta_i)\,(-dA_0) + w_i^0$$

dır. Bölge arz bakımından dar ise:

$$B_i = B_0 + b_i \quad \text{ve} \quad \sin B_i \approx \sin B_0 + \frac{b_i}{\rho} \cos B_0$$

olur. Burada $\rho = \dfrac{180^\circ}{\pi}$ dir. Şuhalde:

$$u_i = \left(\sin B_0 + \frac{b_i}{\rho} \cos B_0\right) dL_0 + (1 - \Delta_i)\,(-dA_0) + w_i^0$$

olur. Bunlardan bulunacak iki adet normal denklem:

$$\left(n_u \sin^2 B_0 + \sin 2 B_0 \left[\frac{b}{\rho}\right] + \left[\frac{b^2}{\rho^2}\right] \cos^2 B_0\right) dL_0$$

$$+ \left(n_u \sin B_0 + \left[\frac{b}{\rho}\right] \cos B_0 - [\Delta] \sin B_0 - \left[\Delta \frac{b}{\rho}\right] \cos B_0\right)$$

$$(-dA_0) + [w^0 \sin B] = 0$$

$$\left(n_u \sin B_0 + \left[\frac{b}{\rho}\right] \cos B_0 - [\Delta] \sin B_0 - \left[\Delta \frac{b}{\rho}\right] \cos B_0\right) dL_0$$

$$+ (n_u - 2[\Delta] + [\Delta^2])\,(-dA_0) + [(1-\Delta)\, w^0] = 0$$

P_0 merkez noktası, bilindiği üzere, lâlettayin alınabilir. Şu halde P_0 noktası, Laplace noktalarının sıklet merkezi olarak alınırsa, denklemlerin hususiyeti tahdit edilmiş olmaz. Bu takdirde:

$$\left[\frac{b}{\rho}\right] = 0$$

ve noktalar oldukça mütecanis bir şekilde tevzi edilmiş iseler $\left[\Delta \dfrac{b}{\rho}\right] \approx 0$ olur. Buna göre normal denklemler:

$$\left(n_u \sin^2 B_0 + \left[\frac{b^2}{\rho^2}\right] \cos^2 B_0\right) dL_0 + (n_u \sin B_0 - [\Delta] \sin B_0)\,(-dA_0)$$

$$+ [w^0 . \sin B] = 0$$

$(n_u \sin B_o - [\Delta] \sin B_o)\, dL_o + (n_u - 2[\Delta] + [\Delta^2])\,(-dA_o) + [(1 - \Delta)\, w^\circ] = 0$ olur.

Bilindiği gibi, bu şekildeki bir denklem sisteminin çözümünün mümkün olabilmesi için, emsallere ait D determinantının sıfırdan farklı alması lâzımdır. $\frac{b}{\rho}$ ve Δ mikdarları n_u, $n_u \sin B_o$ ve $n_u \sin^2 B_o$'a nazaran küçük telâkki edilebileceklerinden:

$$D \approx n_u \left(\left[\frac{b^2}{\rho^2}\right] \cos^2 B_o + [\Delta^2] \sin^2 B_o \right) - [\Delta^2] \sin^2 B_o$$

olur. Genel olarak $\Delta_i < \frac{b_i}{\rho}$ olduğu ispat olunabilir. Buna göre:

$$D \approx n_u \left[\frac{b^2}{\rho^2}\right] \cos^2 B_o$$

olur.

Eğer Laplace noktaları bütün bölgeye muntazam bir şekilde dağılmışlar ise, yani arz entervalleri müsavi ise, kısa bir tahvil ile:

$$D \approx \frac{1}{24\rho^2} \{B\}^2 \cos^2 B_o$$

elde edilir. $\{B\}$ grad cinsinden ifade edilirse:

$$D \approx 0{,}000013 \{B^2\} \cos^2 B_o$$

olur.

Görülüyorki, Loplace noktalarını havi nirengi şebekesinde arz farkı azalırsa D determinantı sıfıra yaklaşır. Bunun sebebi, Laplace denklemlerinde dL_o ve dA_o emsallerinin takriben mütenasip olmasıdır. Tenasüp emsali takriben $\sin B_o$ dır. Her iki normal denklem arasındaki fark da takriben bu emsal kadardır. Hakikaten ikinci normal denklem $\sin B_o$ ile çarpılırsa, küçük bazı terimler müstesna, birinci normal denklem elde edilir. Şu halde, her ne kadar elde iki denklem kurup çözmek imkânı mevcut gibi görünüyorsada, pratik bakımdan dL_o ve dA_o ın tayini için bir tek denklem mevcut demektir. İki denklem arasındaki bu tenasüp, Laplace noktalarının arz farkının azalması nisbetinde daha kat'i olarak tahakkuk eder. Hulâsa olarak:

1. Laplace noktalarını ihtiva eden şebekenin arz farkı fazla değilse, yalnız Laplace kapanma hatalarından istifade ederek, şebekenin tul ve semt tashihlerini yekdiğerinden ayrı olarak bulmak imkânsızdır.

Şebeke kâfi derecede küçük ise, küçük terimler atılarak, her iki normal denklem:

$$dL_o \,.\, \sin B_o - dA_o = \frac{[w^o]}{n_u}$$

veya:

$$\frac{[w^o]}{n_u} = dA_o - dL_o \,.\, \sin B_o$$

şekline girerler. Bunu şu suretle ifade edebiliriz:

2. Laplace kapanmalarından kat'i olarak ancak, semt tashihi ile mebdein arzının sinüsü ile çarpılmış tul tashihi arasındaki fark, tayin edilebilir.

Laplace noktalarının arz farkları azaldıkça bu farkın kıymeti, Laplace kopanma hatalarının vasatisine yaklaşır.

Bu farkı parçalayarak dL_o ve dA_o teker teker tayin edilmek istenirse, Laplace denklemlerinden başka, tul veya semtdeki şakul inhiraflarına ait hata denklemlerini de, şakul inhirafı muvazenesinde olduğu gibi, nazarı itibara almak icap eder.

Yekdiğerini takip eden mükerrer hesaplarda şakul inhirafı denklemlerinin tesirinin, Laplace denklemlerininkine nazaran, gittikce azaldığını ve hesabın sonuna doğru normal denklemlerde, Laplace denklemlerinden gelen kısmın en mühim kısmı teşkil ettiğini evvelce zikretmiştik.

Bu takdirde ise, yukarıda da zikredildiği veçhile, yalnız $(dA_o - dL_o \,.\, \sin B_o)$ mikdarı kat'i olarak bulunabilir ve Laplace denklemleri yalnız bir veya yekdiğerinden gayet az farklı iki normal denklem verirler.

Buna göre şakul inhirafı muvazenesi şu suretle tesbit edilebilir:

Yekdiğerini takiben yapılan hesaplarda Laplace denklemlerinin vezni, muayyen bir mikdarı (pratik hesap ile bulunan) geçer, yani normal denklemlerdeki Laplace denklemine ait kısımlar şakul inhirafı denklemlerine ait kısımlardan büyük olursa, Laplace normal denklemleri vasıtasile ve kısaca dL_0, dA_0 cinsinden veya dA_0, dL_0 cinsinden (her iki halde de netice aynidir) ifade edilir ve bu suretle şakul inhirafı denklemlerinde iki meçhulden biri ifna edilmiş olur. Neticede yalnız iki meçhullü bir normal denklem sistemi elde edilir. Üçüncü meçhul ifna için kullanılan denklem ile elde edilir.

İfna işinde, yekdiğerinden gayet az fark eden bu iki denklemden hangisinin tercih edileceği, pratik bakımdan şayanı ehemmiyet değildir. Yapılan hesaplarda vasati bir denklem kullanılmıştır. Bunun için nisbet emsali sütün sütün tesbit edilmiş ve vasati kıymet ile (takriben sın B_0) ikinci normal denklem çarpılmıştır. Bunların birinci normal denkleme ilâvesi ile nihaî ifna denklemi bulunmuştur.

IV. Şimdiye kadar yapılan etütler

Aşağıda şimdiye kadar bu hususta neşr edilen etütler, tam olduğu iddiasında bulunmadan, kısaca zikredilmiştir:

A. Şakul inhirafının şark-garp mürekkipini iki defa tayin etmeyen usuller (yani Laplace noktalarını nazarı itibara almayanlar).

1. C. V. Orff (1) : Bavyera ve civarındaki 11 nokta ile bir şakul inhirafı muvazenesi yapılmış ve burada dB_0, dL_0, dA_0 ile elipsoid anasırına ait iki parametr meçhul olarak alınmıştır. Her ne kadar astronomik noktalardan dördü Laplace noktası ise de Laplace denkleminden hiç istifade edilmemiştir.

2. A. Nagel (2) : Şimali Saksonyadaki 5 arz ve semt istasyonunda bir şakul inhirafı muvazenesi yapmıştır. Nagel şebekeyi sabit farz etmekle beraber bunu, affin Taransformasyon kanun-

(1) Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873 S. 746

(2) Internationale Erdmessung, verhandlungen der 1837 abgehaltenen Allgemeinen Conferenz. Berlin 1888, S. 222

larına göre değiştirmektedir (3). Burada, elipsoid eb'adı sabit kalsa bile, şebeke şeklinin değişmesinde 6 parametrin tayinine lüzum vardır.

3. R. Schumann (4) 33 semt istasyonu ile ve yalnız $[\eta\alpha^2, tg^2 B] = min.$ olmak üzere şebeke dönüklüğü bulunmuştur. Mevcut 33 arz ve 4 tul tayininden istifade edilmemiştir.

4. V. K. Hristow (5): 9 arz ve semt istasyonu ile $[\zeta^2 + \eta^2]$ asgarî yapılmış ve bu esnada mebde noktasının ζ_o, η_o şakul inhirafı mürekkipleri ile elipsoidin büyük nısıf mihverinin rölatif tahavvülü meçhul olarak alınmıştır. Ölçülen arz kıymetleri, Pizetti'nin şakul inhirafı tarifine uygun olarak, şakul inhinasından dolayı tashih edilmişlerdir.

B, şakul inhirafı şark-garp mürekkipinin çift olarak tayin edildiği usuller (yani Laplace noktaları nazarı itibara alındığına göre)

a) Direk Metodlar

Bunlarda karakteristik nokta, şakul inhirafı muvazenesinde η nın çift olmaması ve Laplace kapanma hatalarının daha evvelki şebeke muvazenesi esnasında giderilmiş olmasıdır.

5. F. R. Halmert (6): «Lotabweichungen I» deki muvazene kat'î değildir. Zira zincirlerden alınan fonksiyon değerleri rasat gibi muamele görmektedir. Bundan başka astronomik tuller hatasız olarak alınmıştır.

6. F. R. Helmert - A. Börsch - L. Krüger (7): «Lotabweichun-

(3) W. Rinsdorf, Koordinatentransformationen. Aus «Dreiecks - und Höhenmessung» Berlin 1940, S. 165

(4) R. Schumann - F. Hopfner, Der Meridianbogen Grossenhain - Kremsmünster - Pola. Wien 1922

(5) V. K. Hristow, wie ist das bulgarische Triangulationsnetz orientiert? Jahrbuch des geographischen instituts. Sofia 1932.

(6) F. R. Helmert, Lotabweichungen, Heft I. Veröff des Königl. Preussisehen geod. Instituts. Berlin 1886

(7) F. R. Helmert, Die Europ. Langengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis warschau. I. Heft. Veröff. Des Königl. Preuss. Geod. Instituts u. Centralbüros der intern. Erdmessung. Berlin 1893.

gen I» deki müstakillen muvazene edilen kısımlar, prusya nirengisinden alınmıştır. Burada ise kısımların rabit şartsız yeni muvazeneleri yapılmaktadır. Astronomik tuller de artık hatasız farz edilmemektedirler.

7. L. Krüger (8): Esas itibarile 6. ncı maddedeki metodun aynıdır.

8. A. Berroth (9): (3) deki şebeke tevsi edilmiş ve (6) ve (7) ye göre hesaplanmıştır.

9. A. Berroth (10): 6 ve 7 muvazenelerinde ζ_o, η_o ile elipsoidin mihver ve basıklık tahavvüllerine ait normal denklem kısımları alınıp toplanmıştır. Bu suretle şebeke oryantasiyonu ile elipsoid tahavvülâtı, her iki şebekenin şakul inhiraflarına en uygun gelecek tarzda elde edilmiştir.

10. W. Heiskanen (11): Bir garbi avrupa, bir orta avrupa ve bir de Rus-Iskandinav şebekesi 9 daki gibi hesaplanmıştır. Yalnız şakul inhiraflarına topografik-izostatik tashihler getirilmiştir. Meçhuller 9 dakinin aynidir.

11. W. Heiskanen (12): 10 daki hesap, ekvatör basıklığı da meçhul olarak ilâve edilmek suretile, tevsi edilmiştir.

b) Endirek metodlar

Aşağıdaki etütlerde, yekdiğerini takiben yapılan hesapların yalnız ilk kademesi hesaplanmıştır.

12. J. F. Hayford (13): Şimdi Amerikanın astronomik-jeo-

(8) L. Krüger, Lotabweichungen. Heft V veröff. Des Königl. Preuss. Geod. Instituts, N. F. Nr 68. Berlin 1916.

(9) A. Berroth, Der Meridianbogen Grossenhain - Pola und die Lotrichtung im preussischen bayerischen, österreichischen und ungarischen Triangulations - Hauptpunkt. Z. F. vermessungswesen 1924, S. 41.

(10) A. Berroth, Die gebrauchlichen Ellipsoide und die Lotabweichungen. Veröff. des preuss. Geod. Instituts. N. F. Nr. 85. Berlin 1922.

(11) W. Heiskanen, Die Erddimensionen nach den europaischen Gradmessungen. Veröff. des Finnischen geod. Instituts, Nr. 6 Helsinki 1926.

(12) W. Heiskanen, über die Elliptizitat des Erdaqustors. veröff. Des Finn. Geod. Inst. Nr. 12 Helsinki 1929.

(13) J. F. Hayford, Supplementary investigation in 1909 of the Earth and Isostasy. Washington 1910. (Deutscher Bericht von o. Eggert in: Zeitschrift f. verm. wesen 1911' S. 534).

dezik kat'i muvazenesini yapmadan, Laplace kapanma hataları, evvelâ bir ilk hesap ile koordineleri bulunmuş olan şebekeyi, keyfi sayılabilecek bir usul ile, gevşetmek hususunda kullanılırlar. Yani noktaların ilk pozisyonları o suretle değiştirilir ki Laplace kapanmaları giderilmiş olsun. Şakul inhirafı muvazenesinde şu meçhuller tayin edilmiştir: dB_0, dL_0, dA_0 ve elipsoid eb'adına ait iki meçhul. Şakul inhirafları topografik-izostatik olarak irca edilmişlerdir.

13. S. Finsterwalder (14): Bavyera nirengi şebekesindeki 7 Laplace kapanma hatasından vasatî bir kıymet hesaplanmıştır. Bu vasati kıymet semt dönüklük tashihi olan dA_0'a müsavi alınmış ve bayyera şebekesinin cihetlenmesi tashih edilmiştir.

14. M. Kneissel (15): S. Finsterwalder'in verdiği bir fikirle Hayford gibi, jeodezik şebekeyi bilâhara Laplace semtleri ile tashihe çalışmıştır. Şebeke muvazenesinden sonra bulunan ve rasat gibi muamele gören jeodezi hatları o suretle döndürülmüştür ki, jeodezi hattının baş ve sonuna ait Laplace kapanma hatalarının vasatisi sıfır olsun. Jeodezi hatları da, Laplace noktalarındaki koordine farklarının karelerinin toplamı asgarî olacak surette, birleşdirilir.

15. K. Ledersteger (16): Burada iki yol gösterilmektedir. Problemin halli ve binnetice şakul inhirafı muvazenesinde evvelâ şakul inhirafı noktalarının sayısı ile Laplace noktalarının sayısı

(14) S. Finsterwalder, Eine neue astronomische orientierung des bayer. Hauptdreiecksnetzes sitz Berichte der bayer. Akad der wiss. math - Naturwiss. Abteilung München 1935 S. 81.

(15) M. Kneissel, verbesserung der orientierung eines Dreiecksnetzes durch Laplceesche punkte. sitz. Berichte der bayer. Akad. der wiss. math - naturwiss. Abteilung München 1939 S. 11.

(16) K. Ledersteger, Das Lotabweichungssystem der öster - unga. Militartriang. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst 1943 S. 78.
und: Die Lotabweichung im deutschen zentralpunkt und die orientierung des Reichsdreiecksnetzes östlich der Elbe. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst 1943 S. 171.
und: Die orientierung des Reichsdreieksnetzes. zweite Teiluntersuchung. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst 1944 S. 34.
und: Die absolute astronom. orientierung der Grossraumtriangulierungen 1943.

yekdiğerile mukayese edilmektedir. Şakul inhirafı noktaları fazla ise $[\zeta^2 + \eta^2\alpha] = \min.$ yapılmakta ve bu suretle dB_0 ve dA_0 meçhulleri tayin edilmektedir. Şebeke buna göre kaydırılıp döndürüldükten sonra mevcut Laplace kapanma hataları bulunmakta ve $[u^2] = \min.$ şartı ile son meçhul olan dL_0 tayin edilmektedir.

16. A. Buchholtz (17): Metodu bu yazıdaki harflerle inceleyelim: Bütün Laplace noktaları için [u. cosec B] teşkil edilir:

$[u. \operatorname{cosec} B] = [\lambda - L - (\alpha - A) \operatorname{cosec} B] - n_u\, dL_0 + (l - \Delta) \operatorname{cosec} B]\, dA_0$

Bu denklemde de:

$$\sin B \approx \sin B_0 + \frac{b}{\rho} \cos B_0$$

vaz edilirse:

$$[u. \operatorname{cosec} B] = [\lambda - L - (\alpha - A) \operatorname{cosec} B] - n_u\, dL_0$$

$$+ dA_0 \left\{ \frac{n_u}{\sin B_0} - \frac{[\Delta]}{\sin B_0} + \left[\Delta \frac{b}{\rho}\right] \frac{\operatorname{cotg} B_0}{\sin B_0} - \left[\frac{b}{\rho}\right] \frac{\operatorname{cotg} B_0}{\sin B_0} \right\}$$

olur. Bundan sonra 3 esas kabul edilmektedir:

1. Mebde noktası Laplace noktalarının sıklet merkezinde alınmaktadır. Yani $[b] = 0$ dır.
2. Keyfi olarak $[u. \operatorname{cosec} B] = 0$ farz edilmektedir.
3. Daima $\Delta > 0$ olduğu halde $[\Delta]$ ve $[\Delta\, b]$ sıfır farz edilmektedir. Bu takdirde dL_0 ve dA_0 arasında aşağıdaki ifna denklemi elde edilir:

$$dL_0 = dA_0 \cdot \operatorname{cosec} B_0 + \frac{1}{n_u} [\lambda - L - (\alpha - A) \operatorname{cosec} B]$$

Bu denklem ile şakul inhirafına ait hata denklemlerinde dL_0 veya dA_0 ifna edilebilir. Yazıda, lüzum olmadığı halde, dL_0:

$$dL_0 = \Delta L_0 + \delta L_0$$

gibi iki kısma ayrılmış olarak gösterilmektedir ve:

$$\delta L_0 = dA_0 \,.\, \operatorname{cosec} B_0 + \left(\frac{1}{n_u} [\lambda - L - (\alpha - A) \operatorname{cosec} B] - \Delta L_0\right)$$

Burada ΔL_0 o suretle tayin edilmektedir ki, sağ tarafdaki kerre

(17) A. Buchholtz, versuch einer orientierung des Lettischen Dreiecksnetzes nach astronomischen Bestimmungen 1944.

içi sıfır olsun. ΔL_0 ın hesaba sokulması ve sıklet merkezinin mebde olarak alınması sayesinde yalnız ifna denklemi basitleşmektedir.

Buehholtz'un metodu ile yukarıdaki metod arasındaki fark şu suretle tesbit edilebilir :

Bu etüdde ifna denklemi, normal denklemlerdeki Laplace kısımlarından :

$$[u \sin B] = 0 \quad \text{ve} \quad [u(1-\Delta)] = 0$$

şeklinde elde edilmekte, Buchholtz'da ise tamamen keyfi bir faraziye olan :

$$\left[\frac{u}{\sin B}\right] = 0$$

münasebetinden istihraç edilmektedir. Buchholtz, esas itibarile lüzumu olmamakla beraber, mebde noktasını Laplace noktalarının siklet merkezinde almıştır ki, bu etüdde böyle bir faraziyeye lüzum görülmemiştir. Bu faraziye ile bulunan :

$$[(1-\Delta) \operatorname{cosec} B] = n_{\prime\prime} \operatorname{cosec} B_0$$

münasebeti tam olarak tahakkuk etmiş değildir. Zira daima $\Delta > 0$ olduğundan $[b] = 0$ fakat $[\Delta]$ ve $[\Delta . b]$ sıfır değildirler. Keza yukarıda, ifna denklemine ait yolun, W° Laplace kapanma hataları sıfıra yaklaşdığı zaman, lüzumlu olduğu gösterilmiştir. dL_0 ın Buchholtz tarafından ikiye ayrılması da, kolaylaştırıcı olmakla beraber, lüzumlu değildir.

Buchholtz un şakul inhirafı noktalarında semt ölçülerini hiç nazarı itibara almaması da nazarı dikkati çekmektedir.

V. Sonuç

Bu etüdde, F. R. Helmert'in doğrudan doğruya olan metodu yerine, şebeke ve şakul inhirafları muvazenelerini yekdiğerine yaklaşdıran endirek bir metodun nasıl kullanılabileceği gösterilmekte ve bu arada Laplace denkleminin mühim rolü ile bunun evsafı hakkında genel mahiyette mütalâalar yürütülmektedir.

Şimdiye kadar edinilen tecrübelere göre, endirek metodlarda hesap işinin, eldeki denklemler ile en fazla mütenasip olduğu ve doğrudan doğruya metodlarda ise bunun karesile mütenasip olduğu ve Laplace denklemi münasip şekilde kullanıldığı zaman şebeke muvazenesi ile şakul inhirafı muvazenesinin yekdiğerine gayet az tâbi olduğu düşünülürse, muvazene imkânının, endirek metod ile oldukça genişlediği görülür.

Bu hususta yapılmış ve endirek metodun konvergenz'ini de inceleyen bazı hesaplardan ayrıca bahs edilecektir.